

ISSN 0073-8433

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN

SEKTION
TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN
NATURWISSENSCHAFTEN

SERIE 9 · NUMMER 14 · 1986

FILM C 1532

Schwingung eines Duffing-Oszillators



INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM · GÖTTINGEN

Angaben zum Film:

Tonfilm (Komm., deutsch od. engl.), 16 mm, farbig, 142 m, 13 min (24 B/s). Hergestellt 1983, veröffentlicht 1985.

Der Film ist für die Verwendung im Hochschulunterricht bestimmt. Veröffentlichung aus dem Institut für Mathematik der Technischen Universität München, Dr. R. SEYDEL, und dem Institut für den Wissenschaftlichen Film, Göttingen, Dr. G. GLATZER; Kamera: Dr. R. SEYDEL; Zeichentrickherstellung: H. TÖGEL.

Zitierform:

SEYDEL, R., und INST. WISS. FILM: Schwingung eines Duffing-Oszillators. Film C 1532 des IWF, Göttingen 1983. Publikation von R. SEYDEL, Publ. Wiss. Film., Sekt. Techn. Wiss./Naturw., Ser. 9, Nr. 14/C 1532 (1986), 16 S.

Anschrift des Verfassers der Publikation:

Prof. Dr. R. SEYDEL, Institut für Angewandte Mathematik und Statistik der Universität Würzburg, Am Hubland D-8700 Würzburg.

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN

Sektion BIOLOGIE

Sektion PSYCHOLOGIE · PÄDAGOGIK

Sektion ETHNOLOGIE

Sektion TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Sektion MEDIZIN

NATURWISSENSCHAFTEN

Sektion GESCHICHTE · PUBLIZISTIK

Herausgeber: H.-K. GALLE · Redaktion: E. BETZ, I. SIMON

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN sind die schriftliche Ergänzung zu den Filmen des Instituts für den Wissenschaftlichen Film und der Encyclopaedia Cinematographica. Sie enthalten jeweils eine Einführung in das im Film behandelte Thema und die Begleitumstände des Films sowie eine genaue Beschreibung des Filminhalts. Film und Publikation zusammen stellen die wissenschaftliche Veröffentlichung dar.

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN werden in deutscher, englischer oder französischer Sprache herausgegeben. Sie erscheinen als Einzelhefte, die in den fachlichen Sektionen zu Serien zusammengefaßt und im Abonnement bezogen werden können. Jede Serie besteht aus mehreren Lieferungen.

Bestellungen und Anfragen an: Institut für den Wissenschaftlichen Film

Nonnenstieg 72 · D-3400 Göttingen

Tel. (05 51) 20 22 04

FILME FÜR FORSCHUNG UND HOCHSCHULUNTERRICHT

RÜDIGER SEYDEL, München, und INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM, Göttingen:

Film C 1532

Schwingung eines Duffing-Oszillators

Verfasser der Publikation: RÜDIGER SEYDEL
Mit 9 Abbildungen und 1 Tabelle

Inhalt des Films:

Schwingung eines Duffing-Oszillators. Bei nichtlinearen Problemen treten spezielle Schwingungsformen auf. Sie werden mit Hilfe der Duffing-Differentialgleichung berechnet und mit Phasendiagrammen erläutert. Demonstration charakteristischer Fälle in computergezeichneten Phasen an einem beidseitig eingespannten Balken: unsymmetrische Schwingungen, Amplitudensprünge und „chaotische“ Schwingungen (strange attractor).

Summary of the Film:

Oscillation of a Duffing Oscillator. In non-linear problems special forms of oscillation occur. They are calculated with the aid of the Duffing differential equation and illustrated using phase diagrams. Demonstration of characteristic cases in computer-drawn phases on a bilaterally mounted beam: unsymmetrical oscillations, amplitude jumps and „chaotic“ oscillations (strange attractor).

Résumé du Film:

Oscillations d'un oscillateur Duffing. Des formes d'oscillations spéciales apparaissent en présence de problèmes non linéaires. Elles sont calculées au moyen de l'équation différentielle de Duffing et expliquées par des diagrammes de phases. Démonstration de cas caractéristiques dans des phases dessinées par ordinateur sur une barre fixée des deux côtés: oscillations asymétriques, sauts d'amplitudes et oscillations „chaotiques“ (strange attractor).

Allgemeine Vorbemerkungen

Es werden erzwungene Schwingungen bei harmonischer Erregung betrachtet (z.B. Schwingungen des Lagers eines unwuchtigen Motors). Der vorliegende Film ist insbesondere an nichtlinearen Phänomenen wie Amplitudensprüngen und „chaotischen“ Schwingungen interessiert. Da man die vielfältigen möglichen Schwingungsformen in Natur und Technik schwerlich an einem einzelnen Beispiel antrifft, liegt es nahe, charakteristische Schwingungen im Trickfilm darzustellen. Hierzu wird eine Duffing-Gleichung konstruiert, bei der verschiedenste nichtlineare Phänomene auftreten. Diese spezielle Duffing-Differentialgleichung lautet:

$$(1) \quad \ddot{x} + \frac{1}{25} \dot{x} - \frac{1}{5} x + \frac{8}{15} x^3 = \frac{2}{5} \cos Ft.$$

(Vgl. dazu auch Lit. [1], [2], [3]).

1. Herleitung der Gleichung, elementare Eigenschaften

Ein eingespannter Balken (Länge $0 \leq z \leq 1$, horizontaler Druck Γ , viskose Dämpfung δ , Membransteifigkeit K) werde durch eine Anregung $P(z, t)$ zu Schwingungen $v(z, t)$ angeregt (Abb. 1):

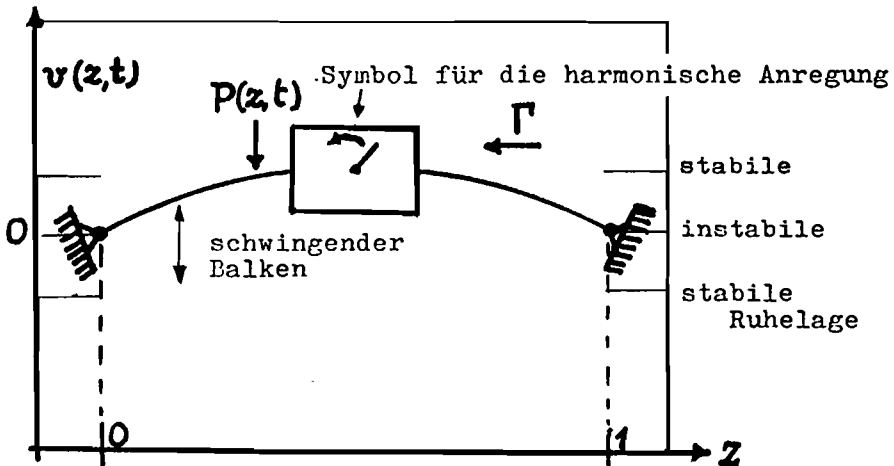


Abb. 1. Geometrie des eingespannten Balkens

Kleine Auslenkungen $v(z, t)$ des Balkens genügen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + (\Gamma - K \int_0^1 (\frac{\partial v(\xi, t)}{\partial z})^2 d\xi) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \delta \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = P(z, t)$$

Unter der Annahme perfekter Symmetrie werden Auslenkung und Anregung als sinusförmig vorausgesetzt,

$$P(z, t) = \gamma \cos Ft \sin \pi z$$

$$v(z, t) = x(t) \sin \pi z .$$

Dies führt auf die Duffing-Gleichung

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos Ft ,$$

$$\beta = \pi^2(\Gamma - \pi^2) , \alpha = \frac{1}{2} K \pi^4 .$$

Besonders vielfältige Schwingungsformen treten auf, wenn die nichtausgelenkte Ruhelage $v \equiv 0$ instabil ist. Um dies zu sichern, wählen wir den horizontalen Druck Γ größer als die Euler'sche Knicklast π^2 . Die Wahl

$$\Gamma = \pi^2 + \frac{1}{5\pi^2} , K = \frac{16}{15\pi^4}$$

führt auf die Koeffizienten der oben angegebenen Duffing-Gleichung (1). Die stabilen Auslenkungen (Strudel) liegen bei

$$(x, \dot{x}) = (\pm \sqrt{3/8}, 0) .$$

Harmonische Lösungen der Duffing-Gleichung haben die gleiche Schwingungsdauer T wie die harmonische Anregung der Frequenz F ,

$$T = 2\pi/F ,$$

erfüllen also die Randbedingungen

$$(1') \quad x(0) = x(T) , \dot{x}(0) = \dot{x}(T) .$$

Wenn $x(t)$ Lösung dieses Randwertproblem (1), (1') ist, dann ist auch

$$\bar{x}(t) := -x(t + T/2)$$

Lösung. In der (x, \dot{x}) -Phasenebene ist der Graph von \bar{x} 0-Punkt-symmetrisch zu dem Graph von x . Im folgenden wird eine Schwingung symmetrisch genannt, wenn $x(t) \equiv \bar{x}(t)$ gilt; anderenfalls heißt sie unsymmetrisch.

2. Berechnung periodischer Schwingungen

Harmonische Schwingungen und Oberschwingungen der Schwingungsdauer nT ($n \geq 1$, ganzzahlig) werden numerisch wie folgt berechnet: Zunächst transformieren wir das Intervall $0 \leq t \leq nT$ auf das Intervall $0 \leq \tau \leq 1$. Mit den Variablen $y_1(\tau) := x(t)$, $y_2(\tau) := \dot{x}(t)$ erhält man das Randwertproblem

$$\frac{dy_1}{d\tau} = \frac{2\pi}{F} n y_2$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = \frac{2\pi}{F} n \left(-\frac{1}{25} y_2 + \frac{1}{5} y_1 - \frac{8}{15} y_1^3 + \frac{2}{5} \cos 2\pi\tau \right)$$

$$y_1(0) = y_1(1), y_2(0) = y_2(1)$$

($n=1$: harmonische Schwingung).

Zur Berechnung der periodischen Schwingungen wird dieses Randwertproblem mit Standardverfahren der numerischen Analysis gelöst. Die Werte für den vorliegenden Film wurden mit dem Mehrzielverfahren berechnet (vgl. Lit. [5]).

3. Sprungphänomene

Die Amplituden A der harmonischen Schwingungen hängen bei der Duffing-Gleichung (1) in folgender Weise von der Frequenz ab (stationärer Fall $\dot{F} = 0$) (Abb. 2):

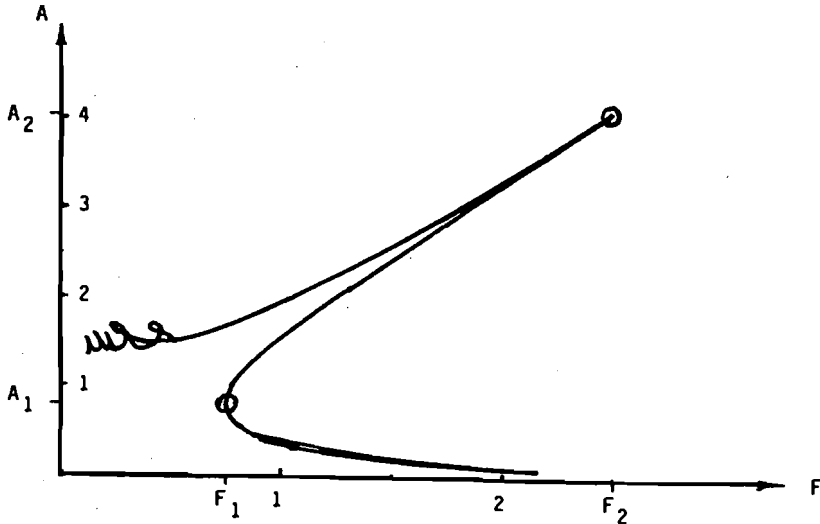


Abb. 2. Frequenzabhängigkeit von Amplitudensprüngen

Im nichtstationären Fall ($\dot{F} \neq 0$) können in der Nähe der kritischen Punkte

$$(F_1, A_1) = (0,748; 0,798)$$

$$(F_2, A_2) = (2,502; 4,111)$$

Amplitudensprünge beobachtet werden (ausgeprägt für kleine Werte von $|\dot{F}|$). So nimmt bei $F \approx F_1, \dot{F} < 0$, die Amplitude plötzlich „größere“ Werte an (vgl. Lit. [4]).

4. Strange Attractor, chaotische Schwingungen

Es gibt nichtperiodische Schwingungen, die anscheinend regellos, „chaotisch“ sind. Charakteristisch für solche Schwingungen ist eine äußerst empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen; hier stößt man an die Grenzen der Berechenbarkeit. So ist beispielsweise wegen der zwangsläufigen Rundungs- oder Abbrechfehler nicht berechenbar, in welchem Punkt das System etwa zur Zeit $t = 1000 \cdot 2\pi/F$ [s] ist, wenn es zum Zeitpunkt $t = 0$ [s] mit den Anfangsbedingungen $x = 0, \dot{x} = 1$ startet (z.B. $F = 0,48$ Hz). Berechenbar ist jedoch ein gewisses Gebiet der (x, \dot{x}) -Ebene, in welchem sich das System nach Integration genügend vieler Integrationslängen $2\pi/F$ befindet. Abb. 3 zeigt die Menge

$M := \{(x(t), \dot{x}(t)) \mid t = k2\pi/F, k = 1, 2, 3, \dots, 2000; F = 0,48, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1\}$, ermittelt durch numerische Integration. Das Bild dieser Figur möge die Bezeichnung „strange attractor“ illustrieren (vgl. [3] und [6]).

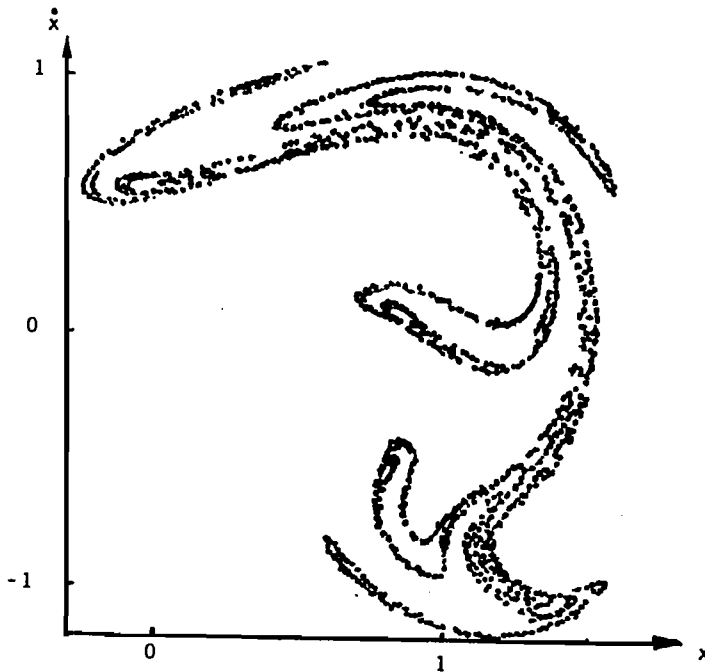


Abb. 3. Punktmenge $M(x, \dot{x})$ im Phasenraum bei „chaotischen“ Schwingungen

5. Die Film-Sequenzen

Der Film umfaßt einen Erklärungsteil sowie 6 Sequenzen, die Gesamtdauer ist 14 Minuten. Jede Sequenz besteht aus den 3 Teilen: Titel, Phasendiagramm und Schwingung. Die technischen Details finden sich in der Tabelle. Jedes Einzelbild der Schwingung hat den Aufbau wie in Abb. 1.

Tabelle: Daten der Film-Sequenzen

Nr. der Sequenz	Titel	F	Anfangsbedingung $x(0), \dot{x}(0)$	Zeitdauer der Schwingung
1	harmonisch, symmetrisch	1	1,8897 0,5694	50 s
2	harmonisch, unsymmetrisch	1	-0,0825 0,0157	30
3	Ausschwingen	3	0,56327 0,00194	10
4		abnehmend		80
5	2-subharmonisch	0,4	0,5292 -0,0695	70
6	Chaotisch (strange attractor)	0,48	0. 1.	120

Es folgen die (x, \dot{x}) -Phasendiagramme aller Sequenzen und dazu die Ausschlag-Zeit-Diagramme $x(t)$. Auf allen Koordinatenachsen ist die Skalierung jeweils $0,5^1$.

6. Bemerkungen zu den einzelnen Sequenzen

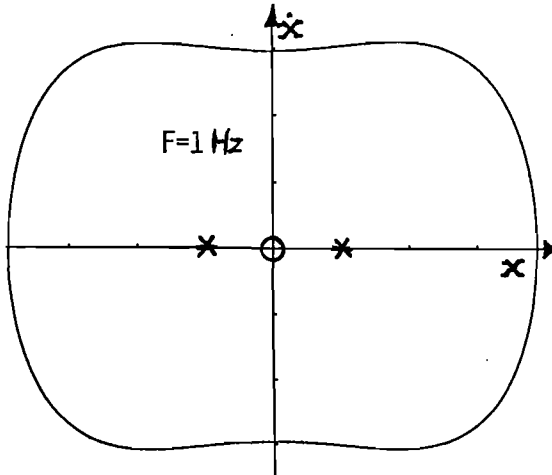


Abb. 4a. Harmonisch-symmetrische Schwingung ($F = 1\text{ Hz}$). Phasendiagramm mit 2 stabilen Ruhelagen des Balkens

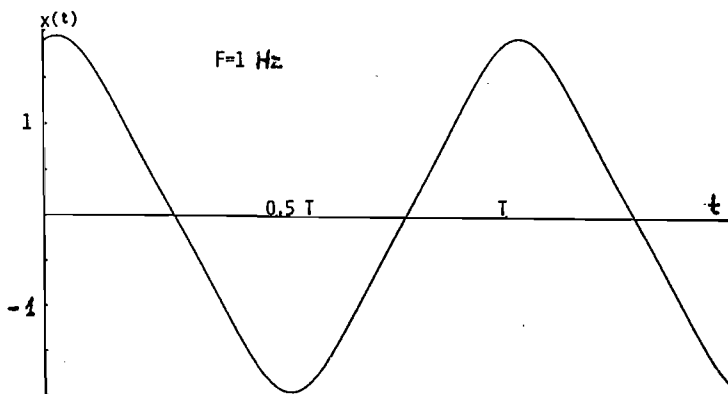


Abb. 4b. Ausschläge $x = x(t)$ der Schwingung von Abb. 4a

1. Sequenz ($F = 1\text{ Hz}$): Man sieht, daß bei der Frequenz $F = 1\text{ Hz}$ der Antrieb in 2π Sekunden eine volle Drehung ausführt. Die Schwingung des Balkens ist harmonisch, d.h. die Schwingungsdauer stimmt mit der Umlaufzeit der Anregung überein. Die Bewegung ist symmetrisch zur nichtausgelenkten Ruhelage. Die Auslenkungen von Antrieb und Balken zeigen im wesentlichen in die gleiche Richtung. Wegen der nur sehr geringen Phasenverschiebung und der Nähe zur Resonanzfrequenz ist die Amplitude der Schwingung „groß“.

¹ Es könnte sinnvoll sein, diese Bilder auf Overhead-Folie zu kopieren, um sie vor der Filmvorführung zu erklären, oder sie evtl. gleichzeitig zu zeigen.

2. Sequenz ($F = 1 \text{ Hz}$): Diese zweite Sequenz zeigt eine harmonische, unsymmetrische Schwingung. Die Phasenlage ist hier derart, daß Auslenkung von Antrieb und Balken entgegengesetzt sind. Dies bewirkt eine geringere Amplitude.

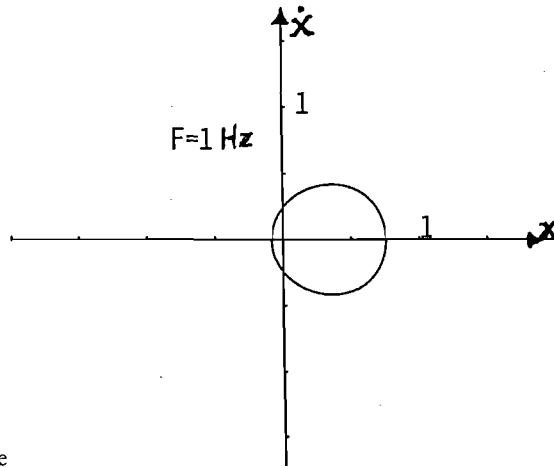


Abb. 5a. Harmonisch unsymmetrische Schwingung ($F = 1 \text{ Hz}$) Phasendiagramm

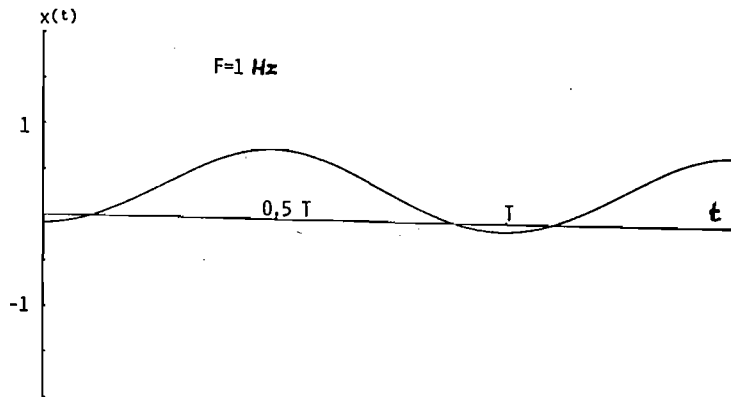


Abb. 5b. Ausschläge $x = x(t)$ der Schwingung von Abb. 5a

3. Sequenz ($F = 3 \text{ Hz}$): Diese nur sehr kurze Sequenz ist die Einleitung zur folgenden 4. Sequenz. Bei „hohen“ Frequenzen der Anregung (hier $F = 3 \text{ Hz}$) hat das System nur wenig Zeit zur Antwort. Als Folge führt der Balken keine „volle“ Schwingung über beide stabilen Ruhelagen hinweg aus. Stattdessen schwingt er mit kleiner Amplitude nur um eine der beiden Ruhelagen.

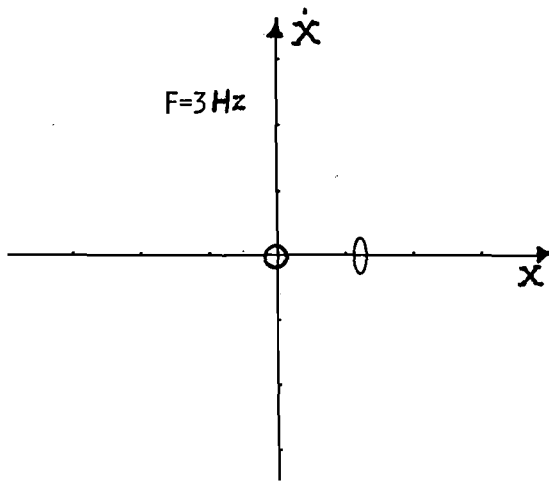


Abb. 6a. Vor dem Ausschwingen ($F = 3\text{ Hz}$) Phasendiagramm

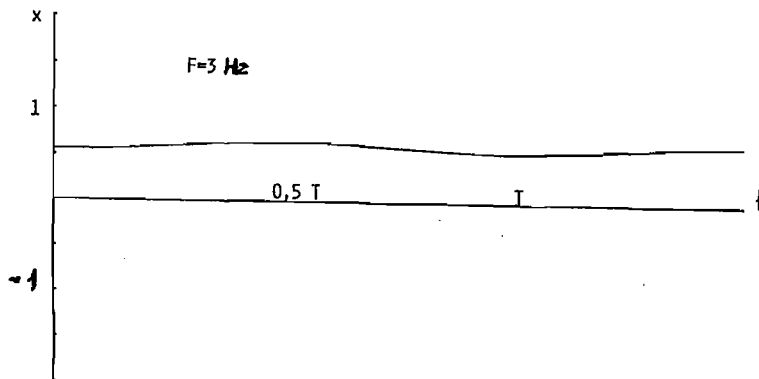


Abb. 6b. Ausschläge $x = x(t)$ der Schwingung von Abb. 6a

4. Sequenz: Beginnend mit den (x, \dot{x}) -Enddaten der 3. Sequenz wird (ohne Pause) in einen anderen Typ von Schwingung übergeleitet: in den nichtstationären Fall, die Frequenz ist variabel. In dieser 4. Sequenz wird der Amplitudensprung beim Ausschwingen gezeigt. Hierzu wird mit $\dot{F} = -0,03 \frac{\text{Hz}}{\text{s}}$ die Frequenz kontinuierlich abgesenkt. Zunächst wächst die Amplitude nur sehr langsam. Wenn die Schwingung die instabile Ruhelage erreicht, nimmt die Amplitude plötzlich große Werte an, der Balken führt volle Schwingungen aus.

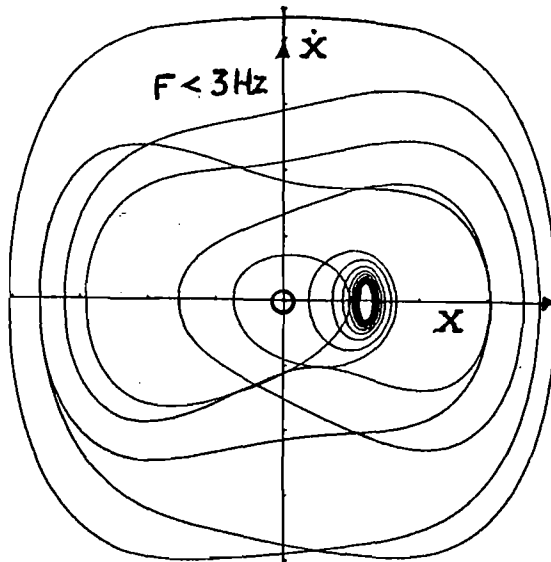


Abb. 7a. Amplitudensprünge beim Absenken der Frequenz ($F < 3\text{ Hz}$). Phasendiagramm

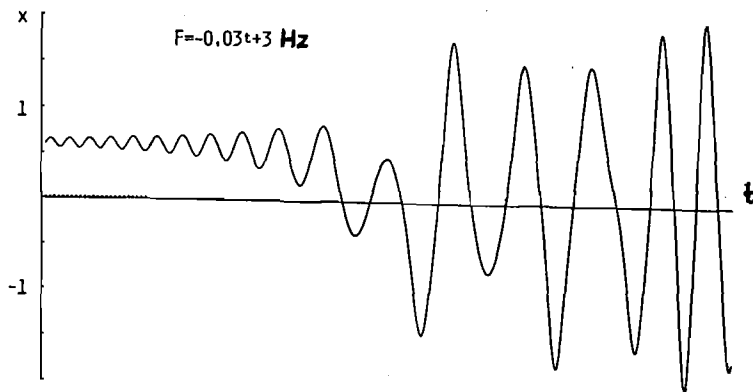


Abb. 7b. Ausschläge $x = x(t)$ der Schwingung von Abb. 7a

5. Sequenz ($F = 0,4\text{ Hz}$): Die 5. Sequenz zeigt eine Oberschwingung, nämlich die zweite Subharmonische. Hier sind zwei Perioden zu unterscheiden: Die Periode der Anregung ist wie immer $T = 2\pi / F[\text{s}]$ die Antwort des Balkens hat die doppelte Schwingungsdauer, hier etwa 31 Sekunden. Die Schwingung ist unsymmetrisch, abwechselnd führt der Balken eine volle Schwingung und eine Schwingung um die obere stabile Ruhelage aus. Eine periodische Schwingung des Balkens umfaßt je zwei dieser Teilschwingungen.

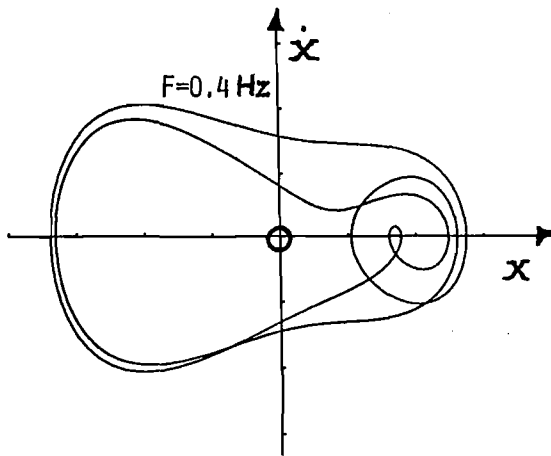


Abb. 8a. Subharmonische Schwingung. ($F = 0,4 \text{ Hz}$)
Phasendiagramm

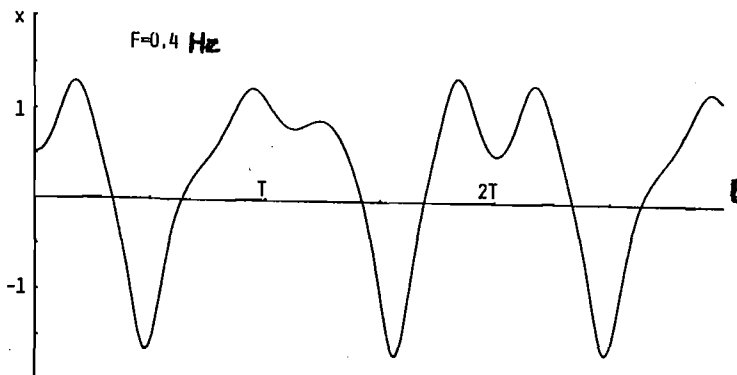


Abb. 8b. Ausschläge $x = x(t)$ der Schwingung von Abb. 8a

6. Sequenz ($F = 0,48 \text{ Hz}$): Nachdem die Sequenzen 1–3, 5 periodische Schwingungen darstellen, zeigt die 6. Sequenz eine scheinbar regellose Schwingung, einen sog. strange attractor.

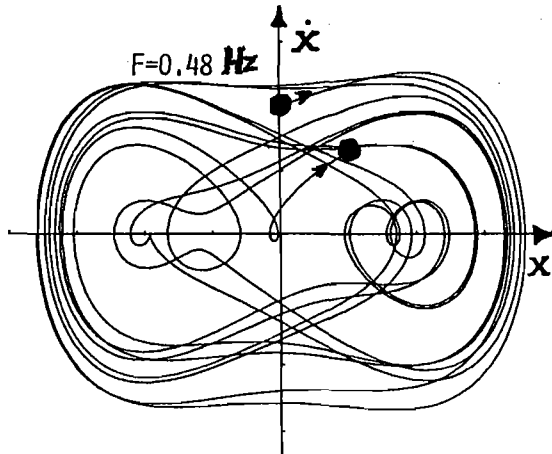


Abb. 9a. Aperiodische „chaotische Schwingung“ ($F = 0,482\text{Hz}$) Phasendiagramm

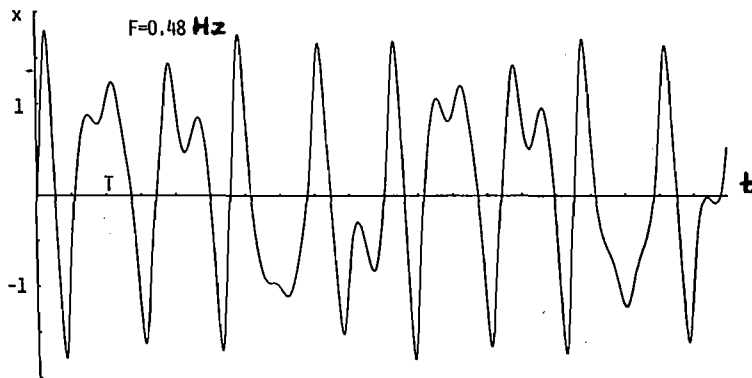


Abb. 9b. Ausschläge $x = x(t)$ der Schwingung von Abb. 9a

Danksagung

Der Verfasser ist Frau H. TÖGEL für ihren Einsatz bei der Programmierung und beim Testen des die Einzelbilder erzeugenden FORTRAN-Programmes zu Dank verpflichtet. Herrn Dr. G. GLATZER gebührt Dank für seine vielen Anregungen und Verbesserungsvorschläge. Die Folge der Einzelbilder wurde im Leibniz-Rechenzentrum der Bayerischen Akademie der Wissenschaften auf Film übertragen (Mikrofilmgerät CalComp 1670).

Erläuterungen zum Film

Wortlaut des gesprochenen Kommentars¹

Wir betrachten einen Balken, der von beiden Seiten so zusammengedrückt wird, daß er im Ruhezustand aus der Mittellage ausgelenkt ist.

Außer dieser hier gezeigten unteren Ruhelage kann der Balken auch die obere Ruhelage einnehmen. Beide Ruhelagen sind durch seitliche Striche gekennzeichnet.

¹Die *Kursiv*-Überschriften entsprechen den Zwischentiteln im Film.

Wir wollen Schwingungen dieses Balkens studieren. Die Anregung der Schwingung steckt in diesem kleinen Kasten in Balkenmitte. Er sei als Symbol für eine harmonische Anregung verstanden. Am einfachsten stellen wir uns darunter etwa einen Motor vor mit einer Unwucht, deren Lage durch den Zeiger angegeben ist. Die Auslenkungen werden durch die sog. Duffing-Differentialgleichung beschrieben. Darin wurden die hier angegebenen Konstanten gewählt.

Hier dreht sich der Antrieb mit der Frequenz $F = 3\text{Hz}$. Nach $2\pi/F$ Sekunden, hier nach ungefähr 2 Sekunden, hat der Zeiger eine volle Umdrehung ausgeführt.

Wir sehen die Antwort des Balkens: er führt eine kleine Schwingung um seine Ruhelage aus.

Wir werden diese Schwingung später noch einmal betrachten.

Je nach Frequenz und Anfangszustand können die verschiedensten Schwingungstypen auftreten. Die folgenden 6 Szenen zeigen 6 verschiedene Schwingungen, die alle durch dieselbe Duffing'sche Differentialgleichung bestimmt sind.

Harmonisch-symmetrische Schwingung

Ehe wir die erste Schwingung mit der Frequenz $F = 1\text{Hz}$ betrachten, werfen wir einen Blick auf das zugehörige Phasendiagramm.

Die waagerechte x-Achse beschreibt gedreht die Vertikal-Auslenkung des Balkens; auf der senkrechten Achse ist die Geschwindigkeit \dot{x} aufgetragen.

Die beiden Ruhelagen sind durch Kreuze gekennzeichnet: das rechte Kreuz entspricht der oberen Ruhelage des Balkens, das linke Kreuz der unteren Ruhelage.

Bei der Betrachtung der Phasenkurve fällt die Punktsymmetrie zum Nullpunkt auf. Die Phasenkurve ist geschlossen, es handelt sich demnach um eine periodische Schwingung. Die hier ausgewählte Schwingung schwingt über beide Ruhelagen hinweg.

In diesem Bild ist der Ausschlag des Balkens über der Zeit aufgetragen. Die Lage oder Phase der Schwingung entspricht ungefähr der einer Cosinus-Schwingung, d.h. Antrieb und Balken bewegen sich weitgehend synchron. Der Zeiger wird oben sein, wenn auch der Balken oben ist, und umgekehrt. Deshalb sind die Maxima und die Minima der Ausschläge besonders ausgeprägt.

Die eigentliche Schwingung ist nahezu harmonisch, d.h. die Schwingungsdauer stimmt mit der Umlaufzeit der Anregung überein.

Harmonisch-unsymmetrische Schwingung

Hier das Phasendiagramm der 2. Szene: Trotz gleicher Frequenz wie in der vorigen Szene ist die Schwingung eine völlig andere. Die Bewegung ist unsymmetrisch zum Nullpunkt. Bei dieser Phasenlage sind die Auslenkungen von Antrieb und Balken einander entgegengesetzt. Dies bewirkt eine geringere Amplitude.

Ausschwingen

In der 3. Szene ist die Frequenz mit $F = 3\text{Hz}$ größer gewählt. Dem Balken bleibt bei dieser Frequenz keine Zeit für eine große Schwingung über beide Ruhelagen. Wie das Phasendiagramm zeigt, schwingt der Balken stattdessen mit sehr kleiner Amplitude nur um eine der beiden Ruhelagen.

Eben haben wir die Frequenz der Anregung mit $F = 3\text{Hz}$ konstant gehalten. Jetzt, in der 4. Szene, ist die Frequenz variabel; sie wird kontinuierlich abgesenkt. Dabei wächst die Amplitude zunächst nur langsam an. Erst wenn der Nullpunkt erreicht ist, wird der Balken plötzlich große Schwingungen über beide Ruhelagen hinweg ausführen. Im folgenden werden die Szenen 3 und 4 unmittelbar hintereinander ausgeführt. Ausgehend von der Frequenz $F = 3\text{Hz}$ wird die Anregung kontinuierlich verlangsamt.

Zweite subharmonische Schwingung

In der 5. Szene erkennen wir eine subharmonische Schwingung, und zwar die zweite subharmonische. Die Frequenz der Anregung wird mit $F = 0,4\text{Hz}$ wieder konstant gehalten. Bei einer subharmonischen Schwingung sind zwei Perioden zu unterscheiden: die Periode der Anregung ist wie immer 2π dividiert durch die Frequenz, – hier ungefähr 15 Sekunden. – Die Antwort des Balkens hat bei der zweiten subharmonischen die doppelte Schwingungsdauer, hier etwa 30 Sekunden.

Chaotische Schwingung

Die letzte Szene zeigt eine ganz andere Art von Schwingung. Obwohl die Frequenz der Anregung wiederum konstant gehalten wird, ist die Schwingung nicht periodisch. Die Trajektorie ist also keine geschlossene Kurve wie zuvor. Stattdessen werden bestimmte Bereiche der Phasenebene scheinbar regellos überdeckt. Hier abschließend eine solche aperiodische Schwingung. Sie wird auch chaotisch genannt.

English Version of the Spoken Commentary¹

(Vibration of a Duffing-Oscillator)

Here we see a beam that is subjected at its ends to compressive forces along its axis, so that its stable equilibrium is in the bent state.

Apart from the depicted lower position the upper position is stable as well. The two equilibria are indicated by the marks on both sides.

We are going to study oscillations of the beam. The movement of the beam is excited by the small box in the middle. This box serves the symbolizing a harmonic excitation. For instance, this symbol simply stands for an unbalanced engine. The position of such an "unbalance" is marked by the pointer. The various possible oscillations can be calculated with the help of this so called Duffing equation and fixed constants as here in the table.

F is the frequency.

Now the engine rotates with a frequency of $F = 3\text{Hz}$. The pointer rotates once in about two seconds, or more precisely, in $2\pi/F$ seconds.

We watch the response of the beam: it oscillates with a small amplitude about the point of equilibrium.

Later, this oscillation will be shown once more.

Depending on both exciter frequency and the initial position of the beam a variety of different types of vibrations are possible. The following 6 scenes will show 6 different oscillations, all of which have been calculated with the help of the same Duffing equation.

¹ The headlines in *italics* correspond with the subtitles in the Film.

Harmonisch-symmetrische Schwingung
(Harmonic Symmetric Oscillation)

Before looking at the first oscillation with the exciter frequency of $F = 1\text{Hz}$, we should glance at its corresponding phase-portrait.

The amplitude x is plotted as abscissa.

The velocity \dot{x} of motion is plotted as ordinate.

Both stable equilibria are marked by crosses; the right-hand cross matches the upper equilibrium of the beam. The left hand one the lower equilibrium.

This first phase-portrait is symmetrical with respect to the origin. The phase curve is closed; this indicates a periodic movement. The large-amplitude oscillation passes both equilibria.

This picture depicts the maximum displacement of the beam versus time. The beam-oscillation is roughly in phase with the exciter cosine-oscillation. That is to say, excitation and beam are approximately synchronized. That is: the pointer will be directed upward when the beam is in the upper position as well. This is the reason for the large amplitude.

Now we are going to see the oscillation, which is an harmonic oscillation, that is, the period of excitation is equal to that of the oscillating beam.

Harmonisch-unsymmetrische Schwingung
(Harmonic Unsymmetric Oscillation)

Here we see the phase-portrait of the second scene. The frequency is the same as in the previous scene, the oscillations however are quite different. The movement is by no means symmetrical with respect to the origin. The phase difference causes opposite displacements of the beam and the excitation. This is the reason for the small amplitude.

Ausschwingen
(After Effect)

In the 3rd scene the exciter frequency has been increased. With the frequency $F = 3\text{Hz}$ the beam has no time for a large-amplitude oscillation. As this phase-portrait shows, the beam oscillates with a small amplitude about only one of the two equilibria.

So far, the exciter frequency of 3 Hz has been kept constant, in the fourth scene, however, the frequency varies. By slowly lowering the frequency, the amplitude increases. At the beginning, this increase is very moderate.

Only after the movement has passed the origin does the vibration suddenly escalate and result in a large-amplitude oscillation, sur-passing both of the stable equilibria.

Now we shall first see scene No. 3 and, immediately afterwards, scene 4. Starting with frequency $F = 3\text{Hz}$, the excitation will be continuously slowed down.

Zweite subharmonische Schwingung
(Second Subharmonic Oscillation)

In the 5th scene we see a subharmonic oscillation, here it is the second subharmonic. The exciter frequency is again kept constant, F is equal to 0.4 Hz.

With a subharmonic oscillation, we distinguish between the oscillation periods of the beam and that of the excitation. As always, the period of the excitation is 2π divided by the frequency, which in this case is about 15 seconds. The response of the beam in the second

subharmonic has a period of about 30 seconds, which is about twice as long as the excitation period.

Chaotische Schwingung (Chaotic Oscillation)

The last scene shows a quite different kind of oscillation, again with constant exciter frequency. The oscillation however is not periodic at all. The phase-portrait is consequently not a closed curve as before. Instead of this, certain areas of the phase plane are covered in a virtually irregular manner.

Finally we show an aperiodic oscillation. This oscillation is called "chaotic" or sometimes "strange attractor".

Literatur

- [1] BECKER, K.-H., und R. SEYDEL: A Duffing equation with more than 20 branch points. In: Numerical Solution of Nonlinear Equations, E.L. ALLGOWER (Hrsg.). Springer Lecture Notes in Mathem. 878 (1981), 98–107.
- [2] DUFFING, G.: Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Braunschweig 1918.
- [3] HAKEN, H.: Advanced Synergetics, Instability Hierarchics of Self-Organizing Systems and Devices. Berlin-Heidelberg-New York 1983. 40 S.
- [4] MAGNUS, K.: Schwingungen. Stuttgart 1976.
- [5] STOER, J., und R. BULIRSCH: Introduction to numerical analysis. Berlin-Heidelberg-New York 1980.
- [6] TROGER, H.: Über chaotisches Verhalten einfacher mechanischer Systeme. ZAMM 62 (1982), T18–T27.

Abbildungsnachweis

Abb. 1–9: R. SEYDEL.