ISSN 0073-8433

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN

SEKTION

TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN NATURWISSENSCHAFTEN

SERIE 8 · NUMMER 20 · 1983

FILM C 1489

Die »Hauptsatzmaschine«
Zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

IWF

INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM · GÖTTINGEN

Angaben zum Film:

Tonfilm (Komm., deutsch), 16 mm, farbig, 190 m, $17^1/_2$ min (24 B/s). Hergestellt 1982, veröffentlicht 1983.
Der Film ist für die Verwendung im Hochschulunterricht bestimmt. Veröffentlichung der Interdisziplinären Arbeitsgruppe Mathematisierung an der Gesamthochschule Kassel, W. DRÖGE, Dr. W. METZLER, und des Instituts für den Wissenschaftlichen Film, Göttingen, Dr. H. RUDOLPH; Kamera: W. DRÖGE, G. MATZDORF (IWF); Schnitt: E. FISCHER; Graphik: N. BAYER, H. GÖTTLICH, J. THOMA, Kassel.

Zitierform:

DRÖGE, W., W. METZLER und INST. WISS. FILM: Die »Hauptsatzmaschine« – Zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Film C 1489 des IWF, Göttingen 1983. Publikation von W. DRÖGE und W. METZLER, Publ. Wiss. Film., Sekt. Techn. Wiss./Naturw., Ser. 8, Nr. 20 (C 1489), 16 S.

Anschrift der Verfasser der Publikation:

Dr. WOLFGANG METZLER, WALTER DRÖGE, Gesamthochschule Kassel, – Fachbereich 17 – Mathematik, Heinrich-Plett-Str. 40, 3500 Kassel-Oberzwehren.

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN

Sektion BIOLOGIE
Sektion ETHNOLOGIE
Sektion MEDIZIN
Sektion GESCHICHTE · PUBLIZISTIK
Sektion PSYCHOLOGIE · PÄDAGOGIK
Sektion TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN NATURWISSENSCHAFTEN

Herausgeber: H.-K. GALLE · Schriftleitung: E. BETZ

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN sind die schriftliche Ergänzung zu den Filmen des Instituts für den Wissenschaftlichen Film und der Encyclopaedia Cinematographica. Sie enthalten jeweils eine Einführung in das im Film behandelte Thema und die Begleitumstände des Films sowie eine genaue Beschreibung des Filminhalts. Film und Publikation zusammen stellen die wissenschaftliche Veröffentlichung dar.

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN werden in deutscher, englischer oder französischer Sprache herausgegeben. Sie erscheinen als Einzelhefte, die in den fachlichen Sektionen zu Serien zusammengefaßt und im Abonnement bezogen werden können. Jede Serie besteht aus mehreren Lieferungen.

Bestellungen und Anfragen an: Institut für den Wissenschaftlichen Film
Nonnenstieg 72 · D-3400 Göttingen
Tel. (0551) 202202

 ISSN 0073–8433

FILME FÜR FORSCHUNG UND HOCHSCHULUNTERRICHT

WALTER DRÖGE, WOLFGANG METZLER, Kassel, und INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM, Göttingen:

Film C 1489

Die »Hauptsatzmaschine« – Zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Verfasser der Publikation: WALTER DRÖGE, WOLFGANG METZLER

Mit 11 Abbildungen

Inhalt des Films:

Die 'Hauptsatzmaschine' – Zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird die Integration stetiger Funktionen auf die Aufgabe zurückgeführt, Stammfunktionen zu finden. Dies ist in der „Hauptsatzmaschine" – einem Integraphen – als kinematisches Prinzip realisiert.
Der Integraph überträgt den Hauptsatz von elementaren Treppenfunktionen auf beliebige stetige Funktionen. Die mathematische Analyse dieses Fortsetzungsprozesses, dargestellt als Zeichentrick, liefert einen einfachen anschaulichen Beweis des Hauptsatzes für stetige Funktionen.

Summary of the Film:

The "Main Theorem Machine" for Main Theorem of Differential and Integral Calculation. Through the main theorem of the differential and integral calculation, the integration of constant functions is returned to the task of finding master functions. This is realised in the "main theorem machine" – an Integraph – as a cinematic principle.
The Integraph transfers the main theorem of elementary step functions to any constant functions. The mathematical analysis of this continuation process, shown as trick film, supplies simple, visual evidence of the main theorem for constant functions.

Résumé du Film:

La "machine à axiome" pour l'axiome du calcul différential et intégral. Par l'axiome du calcul différentiel et intégral, l'intégration de fonctions continues est réduite au problème de trouver des fonctions primitives. Ceci est réalisé comme principe cinématique dans la "machine à axiome", un intégraphe.
L'intégraphe transfert l'axiome de fonctions échelonnées élémentaires sur des fonctions continues quelconques. L' analyse mathématique de ce processus de continuation, représenté par un dessin animé, fournit une preuve simple tangible de l'axiome pour des fonctions continues.

Allgemeine Vorbemerkungen

Der vorliegende Film „Die 'Hauptsatzmaschine' – zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung" stellt in seiner Gesamtkonzeption einen Beitrag zur didaktischen Diskussion zur Einführung der Integralrechnung bis hin zum Hauptsatz dar. Er behandelt einen Beweis des Hauptsatzes in folgender Formulierung:

Hauptsatz

Sei f stetig auf [a; b] und F die Integralfunktion zu f.
Dann ist F differenzierbar auf [a; b] und es gilt:

$$F' = f$$

Der Film ist hauptsächlich für den Einsatz in der Fachlehrerausbildung an Universitäten bzw. Seminaren der Lehrerfortbildung geeignet. Außerdem kann er in den üblichen Anfängervorlesungen der Mathematik zur Einführung der Integralrechnung eingesetzt werden.
Dem vorliegenden Film ging ein dreiteiliger Super-8-Pilotfilm von N. BAYER und J. THOMA [1] zur Einführung in die Integralrechnung voraus, der im Rahmen einer Examensarbeit an der Gesamthochschule Kassel hergestellt wurde. BAYER und THOMA verwenden in ihrem Film einen Integraphen zur Bestimmung des Integrals. Diese Idee greift unser Film auf und ergänzt sie zu einer anschaulichen Begründung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Der Integraph übernimmt hierbei die Funktion eines Integralfunktionszeichners.
Dieser Weg zum Hauptsatz über Integralfunktionen geht zurück auf KIRSCH [4]. Er bietet eine Vielzahl mathematikdidaktischer Vorteile gegenüber den üblichen Zugängen über „Stammfunktionen" bzw. über das „bestimmte Integral".
Zur Einordnung in das didaktische Umfeld sei an dieser Stelle auf die Literatur [3], [5] – [7] verwiesen, die sich mit Konzeptionen zur Einführung der Integralrechnung und Behandlung des Hauptsatzes beschäftigt.

Zur Entstehung des Films

Der vorliegende Trickfilm ist im letzten Drittel des Jahres 1982 in Zusammenarbeit mit der Interdisziplinären Arbeitsgruppe Mathematisierung (IAGM) an der Gesamthochschule Kassel und dem Institut für den Wissenschaftlichen Film (IWF) in Göttingen entstanden.
Der Film besteht aus reinen Zeichentrickanteilen, die auf einer 16-mm-Tricktischanlage der IAGM in Kassel hergestellt wurden, sowie aus Realtrickanteilen, in denen der Integraph als technisches Gerät zum Zeichnen der Integralfunktionen eingesetzt wurde und die beim IWF erstellt wurden.

Zu den Realtrickteilen sei folgendes angemerkt:
Die Aufnahmen wurden im Einzelbildverfahren durchgeführt, d.h. der Fahrstift des Integraphen wurde immer wenige Millimeter (ca. 2 mm) auf dem entsprechenden Graphen entlanggeschoben. Anschließend wurden 1 bzw. 2 Einzelbilder ausgelöst (Stoptrick). Als eine wesentliche Erleichterung erwies sich hierbei das Rückwärtsfilmen, d.h. der vom Integraphen zu zeichnende Graph war bereits vollständig als schmale Klebelinie auf der

Zeichenebene aufgetragen, und der Integraph wurde aus der Endposition in die Anfangsposition rückwärts bewegt. Dabei wurden Schritt für Schritt kleine Stücke der Klebelinie entfernt.
Um das Gerät und seine wichtigsten Teile besser vorzustellen, arbeiteten wir mit zwei Kameras. Zum einen wurde eine Führungskamera benutzt, die senkrecht von oben den Aufbau abfilmte; für Nahaufnahmen schräg von der Seite wurde darüber hinaus eine zweite Kamera eingesetzt, die die sogenannten Gegenschnitte herstellte.

Erläuterungen zum Film

Zwei zentrale Themen beherrschen den Film. Mit dem ersten werden wir von Beginn an konfrontiert:
Ein mechanisches Zeichengerät, ein INTEGRAPH (vgl. Anhang 2), zeichnet beim Entlangfahren auf dem Graphen einer in einem Koordinatensystem („untere Zeichenebene") vorgegebenen Funktion f (Abb. 1) in ein zweites Koordinatensystem („obere Zeichenebene") einen zugehörigen neuen Funktionsgraphen.

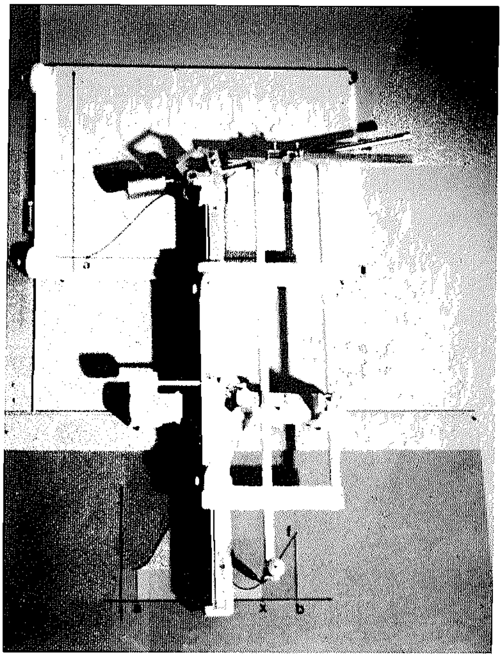

Abb. 1. Integraph

Das zweite folgt etwas später:

Die Fläche unter dem Graphen einer stetigen Funktion f auf [a; b] wird von innen und von außen streifenweise durch Rechteckflächen angenähert (Abb. 2). Sie werden nach oben durch die Graphen zweier Treppenfunktionen begrenzt.

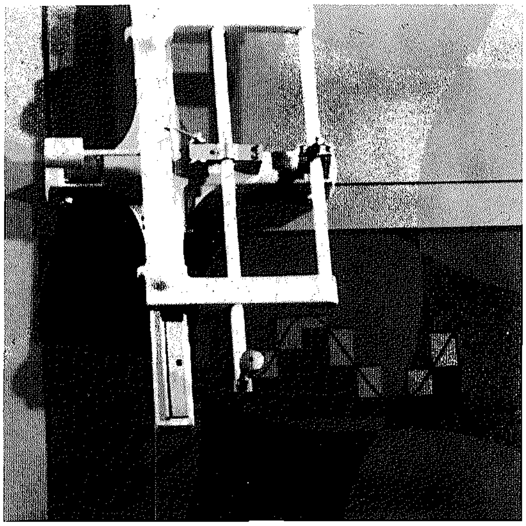

Abb. 2. Flächenapproximation

Durch schrittweise Verfeinerung der zugrundeliegenden Zerlegung von [a; b] entstehen so zwei Folgen von Treppenfunktionen, die (gleichmäßig) von unten bzw. von oben gegen f konvergieren. Der Integraph überträgt diese „Einschachtelung“ von f durch Treppenfunktionen in die obere Zeichenebene: er zeichnet zu den Treppenfunktionen Paare stückweise linearer Integralfunktionen (Abb. 3), die ihrerseits genau eine Funktion einschachteln.

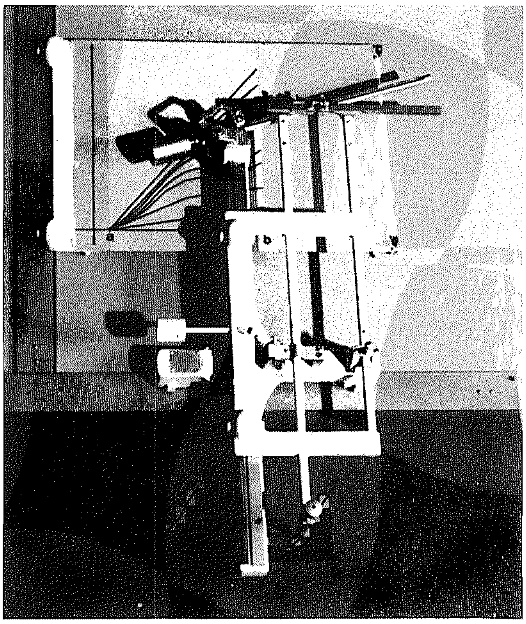

Abb. 3. Approximierende Integralfunktion

Der Film beantwortet die Frage, warum sie die Integralfunktion F zu f ist, und er leitet aus der Approximation eine anschauliche Begründung für den Hauptsatz (1. Teil: „F' = f") her.
Damit beantwortet der Film am Schluß auch die Frage, nach welchem Prinzip der Integraph zu einer gegebenen stetigen Funktion f die Integralfunktion F zeichnet: er ist ein Stammfunktionszeichner (vgl. [2], S. 127)!

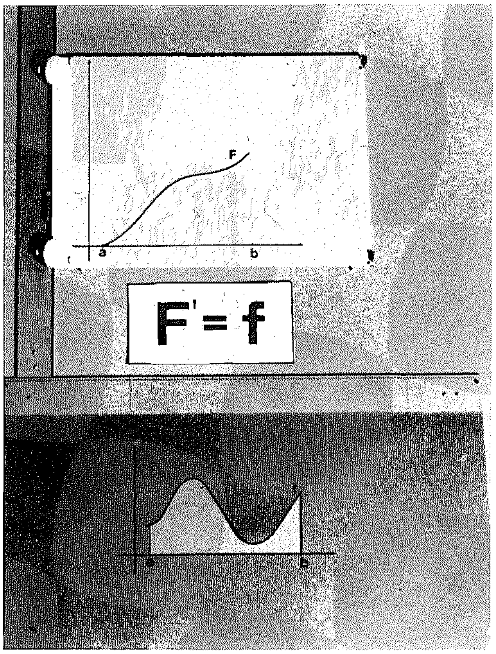

Abb. 4. Der Hauptsatz

Für konstante Funktionen und für Treppenfunktionen läßt sich der Hauptsatz unmittelbar aus der Funktionsweise des Integraphen ableiten.
Im einfachsten Fall einer auf [a; b] k o n s t a n t e n Funktion f = h übersetzt der Integraph die Ordinatenhöhe h in eine (durch ein Steigungsdreieck mit Breite 1 und Höhe h) festgelegte Zeichenrichtung. Beim Entlangfahren auf dem Graphen von f bleibt die Zeichenrichtung konstant (Abb. 5). Der Integraph zeichnet über [a; b] ein Geradenstück, welches die Steigung h besitzt. Er zeichnet (Bedingung F(a) = 0) die Integralfunktion $F : x \rightarrow h(x-a)$ zu f auf [a; b].

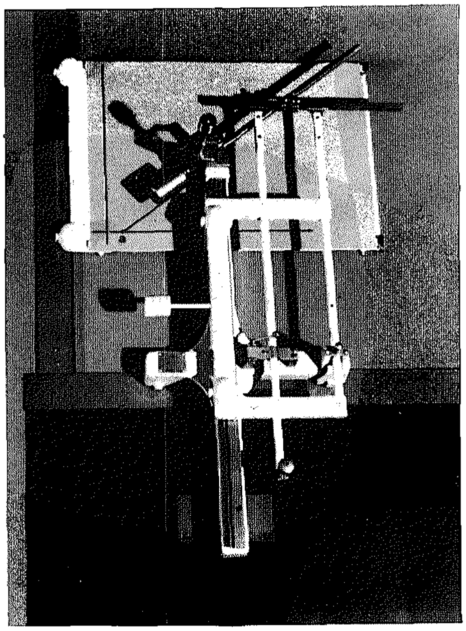

Abb. 5. Konstante Funktion

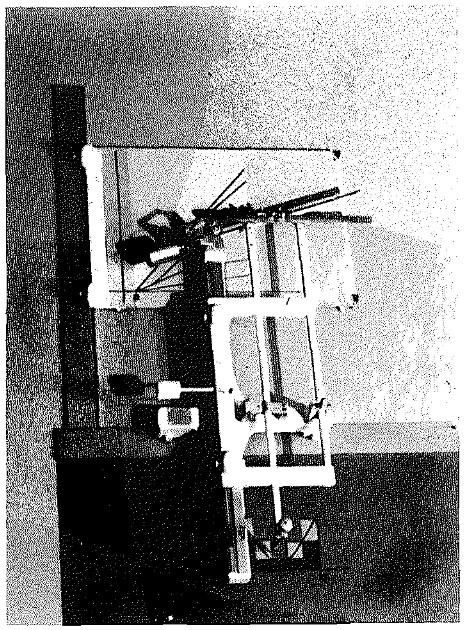

Abb. 6. Treppenfunktion

Zu einer T r e p p e n f u n k t i o n bestimmt der Integraph die Integralfunktion abschnittsweise nach dem gleichen Prinzip: die Höhen der Treppen werden in Steigungen übersetzt (vgl. Abb. 6).
Die senkrechten Wege an den Zerlegungspunkten liefern keine Beiträge zum Graphen der Integralfunktion, sondern dienen der Neueinstellung der Zeichenrichtung und haben Knicke im oberen Graphen zur Folge.
Im Falle der Funktion f aus Abb. 1–4 geht der Film den bereits beschriebenen Weg über zwei Folgen $(\underline{t}_n)$ und $(\overline{t}_n)$ von Treppenfunktionen, die die Funktion f von unten $(\underline{t}_n \leq f)$ bzw. von oben $(\overline{t}_n \geq f)$ beliebig gut annähern.

Der Integraph zeichnet zu $\underline{t}_n$, $\bar{t}_n$ in jedem Approximationsschritt eine „untere“ und eine „obere“ stückweise lineare Integralfunktion, im n-ten Schritt das Paar $(\underline{F}_n, \bar{F}_n)$.

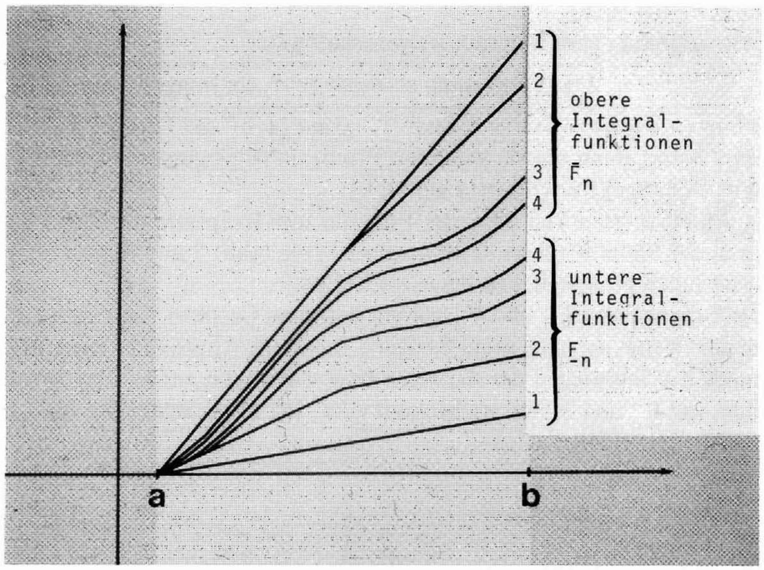

Abb. 7

Wir erwarten bereits nach den ersten vier Approximationsschritten, die im Film gezeigt werden (Abb. 7):

Die Paare $(\underline{F}_n, \bar{F}_n)$ schachteln die Integralfunktion zu f beliebig genau ein.

Der Film veranschaulicht die Argumente zum Beweis dieser Aussage:

(i) Da jede (weitere) Zerlegung durch Verfeinerung aus der vorhergehenden entstehen soll, bilden die unteren Integralfunktionen $\underline{F}_n$ eine monoton wachsende, die oberen, $\bar{F}_n$, eine monoton fallende Funktionenfolge.

Dies folgt aus der Monotonie des Flächeninhalts, ebenso wie

(i i) $0 \leq \bar{F}_n(x) - \underline{F}_n(x) \leq \bar{F}_n(b) - \underline{F}_n(b)$ für $a \leq x \leq b$.

(i i i) $\bar{F}_n(b) - \underline{F}_n(b)$ ist die Differenz der Flächeninhalte (im Film: Differenz einer „Riemannschen“ Obersumme minus Untersumme bei äquidistanter Zerlegung) einer äußeren und inneren „Rechteckapproximation“ der (gesamten) Fläche unter dem Graphen von f und kann bei hinreichender Verfeinerung beliebig klein gemacht werden, d.h.

$$\bar{F}_n(b) - \underline{F}_n(b) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Also schachteln die Paare $(\underline{F}_n, \bar{F}_n)$ genau eine Funktion ein. Wiederum wegen der Monotonie des Flächeninhalts ist es die Integralfunktion F zu f.

Der Integraph zeichnet anschließend zwischen die approximierenden Integralfunktionen $(\underline{F}_n, \bar{F}_n)$ aus Abb. 7 zu f die Integralfunktion F. Wir verwenden dabei, ohne es ausdrücklich zu betonen, folgende M o n o t o n i e e i g e n s c h a f t d e s I n t e g r a p h e n:

Zeichnet der Integraph zu zwei auf [a; b] grafisch gegebenen Funktionen f_1, f_2 die Funktionen F_1 und F_2 so, daß $F_1(a) \leq F_2(a)$ erfüllt ist und gilt $f_1 \leq f_2$, dann gilt auch $F_1 \leq F_2$ auf [a; b].
Erst aufgrund dieser Monotonieeigenschaft gilt:

Der Integraph zeichnet zu f die Integralfunktion F.

B e m e r k u n g: Die Eigenschaft 'f > 0 auf [a; b]' des Filmbeispiels bedeutet keine Einschränkung, denn die verwendeten Flächeninhaltsargumente (Monotonie) gelten für beliebige (stetige) Funktionen f auf [a; b].
In seinem letzten Teil führt der Film hin zum Hauptsatz für stetige Funktionen. Das bis zu dieser Stelle vorliegende Bildmaterial (vgl. Abb. 7 und 8) provoziert dabei folgenden anschaulich geometrischen Beweisgedanken:
Die Graphen von $\underline{F}_n$ und $\overline{F}_n$ nähern sich dem Graphen von F von unten bzw. von oben in der Weise an, daß seine Steigung in jedem Approximationsschritt „streifenweise" durch die Steigungen der darunter- bzw. darüberliegenden Geradenstücke aus den Graphen von $\underline{F}_n$ und $\overline{F}_n$ eingeschachtelt wird (vgl. obere Bildhälfte von Abb. 8).

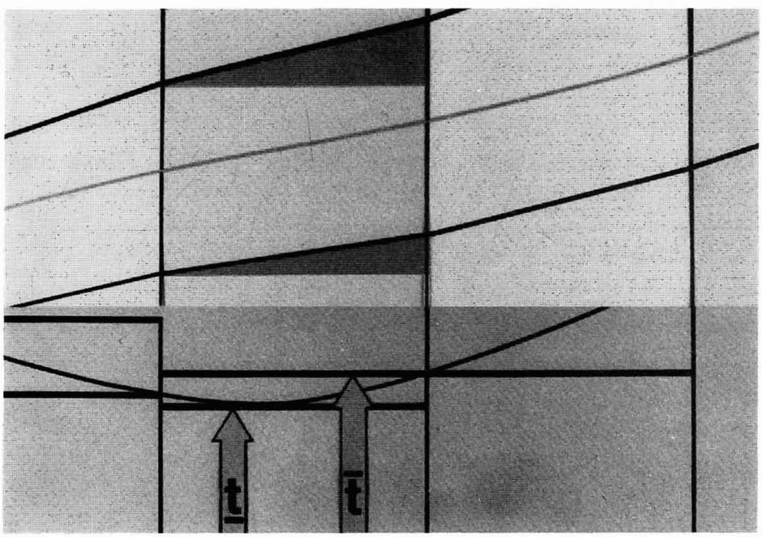

Abb. 8 ist eine Ausschnittsvergrößerung: in der oberen Bildhälfte der gerade beschriebene Sachverhalt, die untere zeigt den zugehörigen Ausschnitt aus der Approximation von f durch Treppenfunktionen

Die Geradensteigungen sind gleich den Höhen der zugehörigen unteren und oberen Treppenfunktionen (in Abb. 8: $\underline{t}$ und $\overline{t}$) und nähern sich einander „in immer schmaler werdenden Streifen" beliebig genau an. Damit schachteln sie automatisch an jeder Stelle x die Steigung F'(x) (beliebig genau) ein.
Da die unteren und oberen Treppenfunktionen die Funktion f beliebig gut approximieren, gilt F' = f, m.a.W.:

Die Integralfunktion F ist eine Stammfunktion von f.

Das ist der Hauptsatz.

Wortlaut des gesprochenen Kommentars

Dieses Gerät ist ein Integraph. Es wird uns eine überraschende Möglichkeit aufzeigen: den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu beweisen.
Wir werden zunächst die Wirkungsweise des Integraphen für den einfachsten Fall einer konstanten Funktion f verdeutlichen.
Vorher wollen wir das Gerät etwas besser kennenlernen: Dieses Gestänge verbindet die untere mit der oberen Zeichenebene.
Der Fahrstift in der unteren Zeichenebene wird auf dem Graphen der gegebenen Funktion f entlangfahren.
Im oberen Teil befindet sich ein Richtungslineal, das von dem Gestänge geführt wird. Verbunden mit dem Richtungslineal ist ein Schneidenrad.
In der Ausgangsstellung stehen Schneidenrad und Richtungslineal parallel zur ersten Achse.
Für die konstante Funktion f = h wird die Ordinatenhöhe h über diese Stange direkt auf das Richtungslineal übertragen. Der Fahrstift steht auf der Ordinatenhöhe h, damit stellt sich gleichzeitig das Schneidenrad in die durch das Steigungsdreieck mit Breite 1 und Höhe h festgelegte Richtung.
Nun wird der Graph der konstanten Funktion f = h mit dem Fahrstift nachgefahren.
Das Schneidenrad verschiebt die obere Zeichenebene, dabei ändert das Schneidenrad, das uns den Graphen einer neuen Funktion zeichnet, die Laufrichtung nicht.
Ihr Graph ist demzufolge eine Gerade. Wir bezeichnen ihn mit F. Er hat die Steigung h.
Da die Steigung an jeder Stelle den Wert der Ableitung F' angibt, ist also F' = h. Also gilt: F ist eine Stammfunktion von f.
An einer beliebigen Stelle x kann der Funktionswert F (x) mit dem Strahlensatz bestimmt werden:
Es gilt also: (F(x) = · (x–a). Anders interpretiert heißt dies: Der Funktionswert der Funktion F an der Stelle x ist gleich dem Inhalt der gelben Rechteckfläche.
Die vom Integraphen gezeichnete Funktion F gibt somit zu jeder Stelle x den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f von der Anfangsstelle a bis zur Stelle x an.
Diese Aussage, zusammen mit dem Ableitungszusammenhang: F'(x) = f (x), ist der Hauptsatz für konstante Funktionen.
Jetzt eine stückweise lineare Funktion. – Hier: ein Knick in der oberen Zeichenebene.
Fährt der Fahrstift weiter entlang der Funktion f, so zeichnet das Schneidenrad den Graphen einer krummlinigen Funktion F.
Für stückweise lineare Funktionen gilt der Hauptsatz stückweise. Für einfache Treppenfunktionen werden wir dies gleich anwenden. Den Hauptsatz für stückweise lineare Funktionen kann man noch immer leicht durch einfache geometrische Berechnungen nachweisen.
Aber: D i e s e r Flächeninhalt zwischen der Anfangsstelle a und einer beliebigen Stelle x ist nun nicht mehr ohne weiteres elementar berechenbar.
Aber man kann die gesamte Fläche unter dem Graphen von f durch eine innere und eine äußere Rechteckfläche einschachteln: Damit wird f durch zwei konstante Funktionen eingeschachtelt.
Mit dem Integraphen bestimmen wir die Integralfunktionen dieser beiden Funktionen.

Zuerst die untere: Während der Fahrstift auf der unteren Konstanten entlangfährt, zeichnet das Schneidenrad im oberen Koordinatensystem die zugehörige Gerade.
Genauso bestimmen wir die Integralfunktion zur oberen Konstanten. Diese Approximationen der Fläche unter dem Graphen von f sind sehr grob. Wir halbieren deshalb die Intervallänge, approximieren die Fläche unter f durch zwei innere und zwei äußere Rechtecke und bestimmen die Integralfunktionen für diese zweite Approximation.
Der gezeichnete Graph hat eine Knickstelle. Die gleiche Beobachtung machen wir für die äußeren approximierenden Rechtecke.
Wir verbessern nun unsere Abschätzung nochmals: Unter dem Graphen von f wird die Fläche durch acht innere und acht äußere gleich breite Rechtecke appoximiert.
... Innere Approximation ... ... Äußere Approximation ... 16-Teilung: nochmals verbesserte Approximation ...
Der Integraph zeichnet Paare von oberen und unteren Integralfunktionen, die sich immer besser aneinander annähern.
Theoretisch kann man f beliebig gut durch untere bzw. obere Treppenfunktionen approximieren. Das heißt: Man kann die Fläche unter dem Graphen von f von innen bzw. von außen beliebig genau durch Rechteckflächen annähern.
Die zugehörigen Integralfunktionen bilden von unten eine monoton wachsende, von oben eine monoton fallende Funktionsfolge. Ja, noch mehr: Die Graphen dieser Paare rücken dabei beliebig nahe zusammen.
Die Differenz der Funktionswerte wächst monoton. Sie muß an der Stelle b am größten sein. Dort ist aber die Differenz der Funktionswerte gleich der Differenz der Flächeninhalte der zugehörigen äußeren und inneren Rechteckapproximationen der gesamten Fläche unter dem Graphen von f im Intervall von a bis b.
Die Länge des Balkens ist also gerade gleich der Summe aller so entstandenen grünen Differenzflächen, von denen wir hier nur einen Ausschnitt zeigen. Und diese kann bei Verfeinerung der Zerlegung beliebig klein gemacht werden.
Natürlich können wir dies im Film nicht veranschaulichen.
Weil nun die oberen und unteren Integralfunktionen bei genügender Verfeinerung beliebig nahe zusammenrücken, gibt es höchstens eine Funktion, die zwischen allen diesen Funktionspaaren liegt.
Fährt man mit dem Fahrstift auf dem Graphen von f entlang, so bestimmt der Integraph die Funktion, die dies erfüllt. Wir wollen sie wieder F nennen.
Aus der Monotonie der Flächeninhalte folgt, daß auch die Integralfunktion von f zwischen allen Paaren liegen muß. Also: Die gezeichnete Funktion F ist die Integralfunktion zu f.
Wir wollen für das Weitere annehmen, daß die Funktion F differenzierbar ist. Dies ist aus der Anschauung heraus leicht zu rechtfertigen; denn: es können im Graphen von F keine Knickstellen auftreten, wenn f nicht springt. Und dies ist ja gewährleistet.
Nun müssen wir für den Hauptsatz noch zeigen, daß die Ableitung von F f ist.
Dazu schauen wir uns die Approximationen von F durch die oberen und unteren Integralfunktionen nochmal an: Die Breite der senkrechten Streifen ergibt sich aus der – gerade erreichten – Zerlegung des Intervalls [a; b] und verkleinert sich mit jedem weiteren Approximationsschritt.

In jedem Streifen kann man die Steigung von F nach oben und nach unten abschätzen durch die Steigungen der darüber- bzw. darunterliegenden Geradenstücke.
In jedem Streifen gilt, wie in diesem: Die Steigung der unteren Integralfunktion ist kleiner gleich der Ableitung F', und diese wiederum ist kleiner gleich der Steigung der oberen Integralfunktion.
Durch unsere Approximation schachteln wir also nicht nur die Funktion F ein, sondern wir schachteln auch – stückweise – ihre Ableitung F' ein, und zwar durch die Steigungen der darunter- bzw. darüberliegenden Geradenstücke.
Schauen wir noch etwas näher hin: In den Streifen sind die Steigungen jeweils konstant – im Gegensatz zu F'. Die untere ist immer kleiner als die obere, und dazwischen liegt F'. Doch wie groß sind die Steigungen?
Nehmen wir doch den entsprechenden Ausschnitt aus den Rechteckapproximationen der Fläche unter dem Graphen von f hinzu.
Die Geradensteigungen sind gleich den Höhen der zugehörigen äußeren und inneren Teilrechtecke, und damit nichts anderes als die Funktionswerte der Treppenfunktionen, die f approximieren.
Wir benennen sie vorübergehend mit $\underline{t}$, $\bar{t}$. Dazwischen liegt F'.
Also gilt: $\underline{t} \leq F' \leq \bar{t}$.
Da sich die Treppenfunktionen beliebig gut von unten bzw. von oben an f annähern, können wir – beide – durch f ersetzen.
Beide $\leq$ bleiben dabei erhalten.
Das kann aber nur dann gelten, wenn F' = f ist. Die vom Integraphen gezeichnete Funktion F ist nicht nur Integralfunktion, sondern auch Stammfunktion zu f.
Das ist aber . . . der Hauptsatz.
Die Ableitung der Integralfunktion F von f ist gleich f! Diese Beziehung realisiert der Integraph, unsere Hauptsatzmaschine.

A n h a n g 1: Zum Beweis des Hauptsatzes

Für die anschauliche Argumentation, daß durch die Approximation nicht nur die Integralfunktion F eingeschachtelt wird, sondern auch – abschnittsweise – ihre Ableitung F', und zwar durch die Steigungen der darunter- bzw. darüberliegenden Geradenstücke (vgl. Abb. 8), geben wir nun eine 'lokale' Präzisierung an.

H a u p t s a t z: Sei f stetig auf [a; b] und F die Integralfunktion zu f. Dann ist F differenzierbar auf [a; b], und es gilt F' = f.

B e w e i s: Sei $x \in [a; b]$. Zum Nachweis von $F'(x) = f(x)$ lassen wir uns zunächst noch einmal durch die Anschauung leiten:
Abb. 9 (a und b) entspricht einem Ausschnitt aus Abb. 8, betrachtet über dem Intervall [x; x+h], h>0. F ist die Integralfunktion zu f, $\underline{F}$ und $\bar{F}$ sind (wie dort) Integralfunktionen zu Treppenfunktionen $\underline{t}$ bzw. $\bar{t}$, die die Funktion f von unten bzw. von oben annähern.

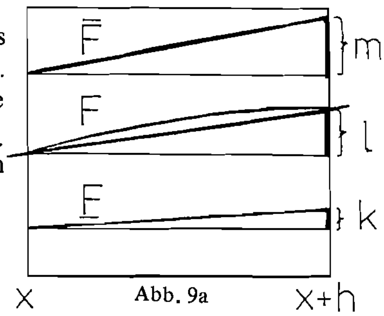

Abb. 9a

Wir können uns Abb. 9 z.B. dadurch entstanden denken, daß für die Treppenfunktionen in Abb. 8 eine (ggf. bis auf die „Randbezirke“) äquidistante Zerlegung so gewählt wurde, daß x selbst ein Zerlegungspunkt, und die Zerlegungsbreite gleich h ist.

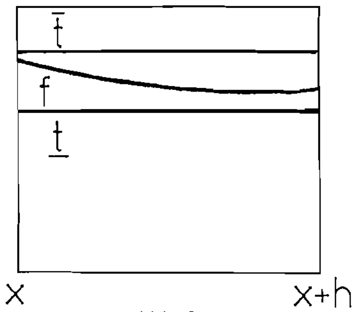

Abb. 9b

Doch egal, welche Wahl der Treppenfunktionen $\underline{t}$ und $\overline{t}$ Abb. 8 zugrunde liegt, in jedem Fall ist sie abhängig von x und h : $\underline{t} = \underline{t}(x,h)$, $\overline{t} = \overline{t}(x,h)$.

Die Länge k, l, m der Balken an der Stelle x + h (Abb. 9a) sind gleich den Flächenzuwächsen unter den Graphen von $\underline{t}$, f und $\overline{t}$ im Intervall [x; x + h] (Abb. 9b).

Für sie gilt wegen der Monotonie des Flächeninhalts:

$k \leq l \leq m$, (*)

$l = F(x+h) - F(x)$

Für die Sekantensteigung $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ (s. Abb. 9) gilt dann:

$$\underline{t}(x,h) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \overline{t}(x,h) \qquad (**)$$

Wählen wir (wie in Abb. 9b bereits vorweggenommen)

$$\underline{t}(x,h) = \min_{t \in [x, x+h]} f(t), \quad \overline{t}(x,h) = \max_{t \in [x, x+h]} f(t),$$

so erhalten wir die übliche Abschätzung für den Differenzenquotienten von F an der Stelle x.

Eine analoge Abschätzung gilt für $h < 0$, d.h. wenn man sich von x aus „nach links“ in das Intervall [x + h, x] begibt.

Aus der Stetigkeit von f folgt dann für $h \to 0$ wie gewohnt die Differenzierbarkeit von F an der Stelle x und $F'(x) = f(x)$. □

Im Beweis sind wir stillschweigend davon ausgegangen, daß h von vornherein so gewählt war, daß bei vorgegebenem x auch der Punkt x + h in [a; b] liegt. Ausnahmen sind die beiden Randpunkte, dort lassen sich jedoch wie üblich die obigen Überlegungen „nach einer Seite hin“ erfolgreich durchführen.

Die „Balkenabschätzung“ (*) können wir ebensogut ohne Rückgriff auf die Flächenzuwächse, d.h. auf die Definition der Integralfunktion, herleiten. Sie folgt unmittelbar aus der oben formulierten „Monotonieeigenschaft des Integraphen“.

Die auf (*) folgenden Beweisschritte bleiben dieselben. In diesem Fall erhalten wir für eine auf [a; b] stetige Funktion f die Aussage:

(1) Die vom Integraphen gezeichnete Funktion F ist eine Stammfunktion zu f.

Mit Hilfe der gleichen Monotonieargumente hatten wir im vorhergehenden Abschnitt bereits gezeigt:

(2) Der Integraph bestimmt zu f die Integralfunktion F.

(1) und (2) zusammengenommen liefern uns ebenfalls die Aussage des Hauptsatzes.

Den Beweis haben wir, anknüpfend an unser Anschauungsmaterial, für den Fall $f(x) > 0$ durchgeführt. Analoge Überlegungen gelten auch in den übrigen Fällen, d.h. wenn $f(x)$ kleiner Null oder gleich Null ist.

A n h a n g 2: Zum Integraphen

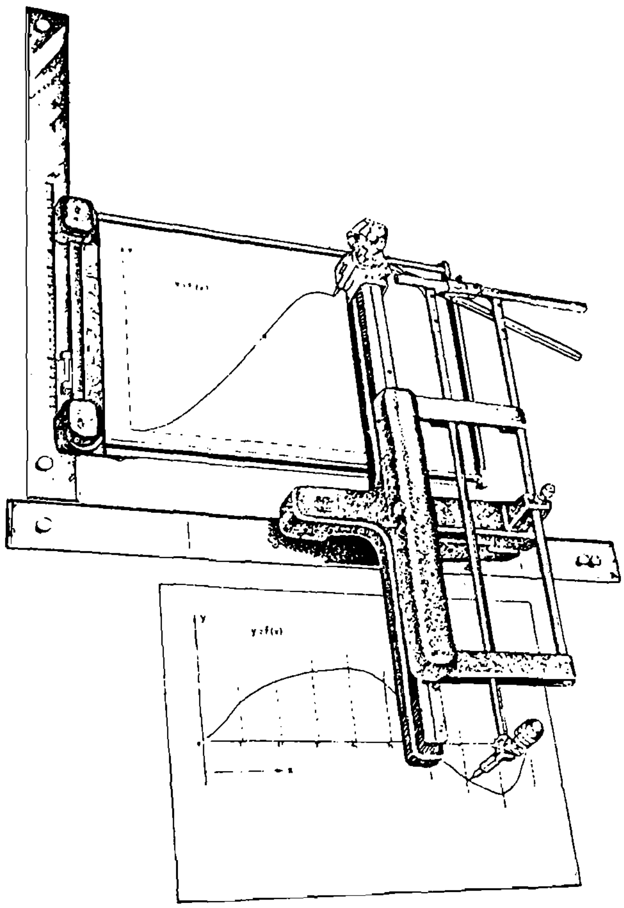

Abb. 10. Integraph der Firma A. OTT, Kempten/Allgäu

Dieser Integraph ist (in den 20er Jahren) von H. ADLER entworfen und von der Firma A. OTT in Kempten (Allgäu) konstruiert und serienmäßig hergestellt worden. Wir geben hier die Beschreibung von WILLERS [WILLERS, A.: Mathematische Instrumente. München und Berlin, 1943, S. 210/11] in Auszügen wieder:

„Beim Integraphen Adler-Ott . . . wird . . . die Integralkurve auf einem durch ein Schneidenrad R in y-Richtung bewegten Integral-Wagen W_1 aufgezeichnet . . . Dieser gleitet

mittels Rollen auf einer y-parallelen Laufschiene S_1 ... Das auf W_1 aufliegende Schneidenrad R ist um den Zapfen Z_1 des Abszissenwagens W_2 drehbar, der auf einer zweiten zu S_1 senkrechten Schiene S_2 rollt ... parallel zur x-Achse ... Auf dem Wagen W_2 rollt in y-Richtung der Ordinatenwagen W_3, der oben die Basisschiene B und unten den Fahrstift F trägt, mit dem man die gegebene Kurve befährt. Auf der Basisschiene ist mittels Mikrometerwerkes der Zapfen Z_2 einstellbar. Dieser gleitet in einem Schutz des um Z_1 drehbaren Richtungslineals RL. Sein x-paralleler Abstand vom Aufsatzpunkt des Schneidenrades auf den Integralwagen W_1 ist die Integrationsbasis b, während die Abmessungen so gewählt sind, daß der y-parallele Abstand dieser beiden Zapfen f(x) ist, wenn der Fahrstift auf der Kurve entlanggeführt wird. Der Winkel zwischen x-Achse und Richtungslineal und damit, da RL stets der Ebene des Schneidenrades parallel ist, zwischen x-Achse und Ebene dieses Rades ist daher $\varphi = \text{arc tg } \frac{y}{b}$. Das Schneidenrad verschiebt also den Integralwagen in der y-Richtung so, daß der mit W_2 verbundene Zeichenstift ZS auf dem Wagen W_1 die Integralkurve verzeichnet ..."
bei uns ist stets b = 1 gewählt.

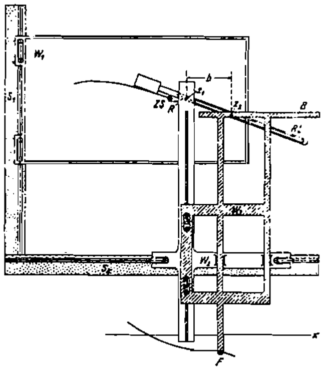

Abb. 11.

Literatur

[1] BAYER, N., und J. THOMA: „Das Integral ..., einmal anders". Eine Einführung in die Integralrechnung unter besonderer Berücksichtigung visueller Hilfsmittel. Staatsexamensarbeit, Fachbereich Mathematik, Gesamthochschule Kassel, 1981.

[2] BLUM, W.: Stammfunktionen als Flächeninhaltsfunktionen – Ein anderer Beweis des Hauptsatzes. Math. Sem. Ber. **28**, H. 1, (1982), 126–134.

[3] GRIESEL, H.: Die Behandlung der Integralrechnung im Unterricht. Handschriftenreihe der Landesstelle MNU Recklinghausen, Heft 42 a.

[4] KIRSCH, A.: Eine „intellektuell ehrliche" Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. DdM **4**, H. 2 (1976), 87–107.

[5] KOCH, A.: Eine propädeutische Behandlung der Analysis. MU **14**, 5 (1968), 12–39.

[6] KOCH, A.: Präzisierung des Integralbegriffs und Grundzüge der Konstruktion der reellen Zahlen. MU **15**, 4 (1969), 5–43.

[7] PICKERT, G.: Analysis in der Kollegstufe. MU **22**, 5 (1976), 64–81.

Abbildungsnachweis

Abb. 1–6 und 9a u. b: W. DRÖGE u. W. METZLER; Abb. 7 u. 8: H. GÖTTLICH; Abb. 10 u. 11: A. OTT.