

ISSN 0073-8433

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN

SEKTION
**TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN
NATURWISSENSCHAFTEN**

SERIE 7 · NUMMER 6 · 1980

FILM C 1286

Keplersche Gesetze der Planetenbewegungen



INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM · GÖTTINGEN

Angaben zum Film:

Tonfilm (Kömm., deutsch od. engl.), 16 mm, schwarzweiß, 56 m, 5 1/2 min (24 B/s). Hergestellt 1977, veröffentlicht 1978.

Der Film ist für die Verwendung im Hochschulunterricht bestimmt.

Veröffentlichung aus der Fakultät für Physik der Universität Freiburg, Prof. Dr. CH. SCHLIER, A. BENZ, und dem Institut für den Wissenschaftlichen Film, Göttingen, Dr. G. GLATZER; Kamera: Ing. G. MATZDORF; Schnitt: L. RUPPEL.

Zitierform:

SCHLIER, CH., A. BENZ und INST. WISS. FILM: Keplersche Gesetze der Planetenbewegungen. Film C 1286 des IWF, Göttingen 1978. Publikation von CH. SCHLIER, Publ. Wiss. Film., Sekt. Techn. Wiss./Naturw., Ser. 7, Nr. 6/C 1286 (1980), 9 S.

Anschrift des Verfassers der Publikation:

Prof. Dr. CH. SCHLIER. Albert-Ludwigs-Universität, Fakultät für Physik, Hermann-Herder-Straße 3, D-7800 Freiburg i. Br.

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN

Sektion BIOLOGIE

Sektion PSYCHOLOGIE · PÄDAGOGIK

Sektion ETHNOLOGIE

Sektion TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Sektion MEDIZIN

NATURWISSENSCHAFTEN

Sektion GESCHICHTE · PUBLIZISTIK

Herausgeber: H.-K. GALLE · Schriftleitung: E. BETZ, I. SIMON

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN sind die schriftliche Ergänzung zu den Filmen des Instituts für den Wissenschaftlichen Film und der Encyclopaedia Cinematographica. Sie enthalten jeweils eine Einführung in das im Film behandelte Thema und die Begleitumstände des Films sowie eine genaue Beschreibung des Filminhalts. Film und Publikation zusammen stellen die wissenschaftliche Veröffentlichung dar.

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN werden in deutscher, englischer oder französischer Sprache herausgegeben. Sie erscheinen als Einzelhefte, die in den fachlichen Sektionen zu Serien zusammengefaßt und im Abonnement bezogen werden können. Jede Serie besteht aus mehreren Lieferungen.

Bestellungen und Anfragen an: Institut für den Wissenschaftlichen Film
Nonnenstieg 72 · D-3400 Göttingen
Tel. (05 51) 21034

FILME FÜR FORSCHUNG UND HOCHSCHULUNTERRICHT

CHRISTOPH SCHLIER, ALOIS BENZ, Freiburg i. Br., und INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM, Göttingen:

Film C 1286

Keplersche Gesetze der Planetenbewegungen

Verfasser der Publikation: CHRISTOPH SCHLIER

Mit 3 Abbildungen

Inhalt des Films:

Keplersche Gesetze der Planetenbewegungen. Die drei Gesetze der Planetenbewegung von Kepler werden an Beispielen demonstriert. Der erste Teil dient gleichzeitig zur Veranschaulichung des Einflusses, den die Anfangsbedingung einer Bewegung auf deren weiteren Ablauf hat.

Summary of the Film:

Kepler's Laws of Planetary Motion. The film demonstrates Kepler's three laws of planetary motion. In addition the first part shows that a trajectory is determined not only by the force-field but also by the initial condition of the motion.

Résumé du Film:

Les Lois de Kepler du mouvement planétaire. Le film démontre les trois lois de Kepler. Au surplus, dans la première partie du film, on met en évidence que l'orbite de la planète n'est pas uniquement déterminée par le champ gravitationnel, mais aussi par les conditions initiales du mouvement.

Allgemeine Vorbemerkungen

Der Film hat zwei Aufgaben, z. B. im Rahmen einer Vorlesung »Experimentalphysik«:

1. Er soll die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung, die man experimentell ja nicht vorführen kann, veranschaulichen.
2. Er soll die sehr viel allgemeinere Aussage der Mechanik demonstrieren, daß die Bahn eines Körpers in einem Kraftfeld von zwei Dingen abhängt: vom Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$, bzw. der zugehörigen Newtonschen Bewegungs- (Differential-) Gleichung

$$m\vec{\ddot{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \quad (1)$$

und von den Anfangsbedingungen der Bewegung, z. B. den Werten \vec{r}_0 und $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0$ zur Zeit $t = 0$. Demgemäß wird das 1. Keplersche Gesetz nicht nur an einzelnen Beispielen dargestellt, sondern es werden 3 Serien von Bahnen zu verschiedenen Anfangsbedingungen gezeigt.

Die theoretischen Grundlagen sind in jedem Lehrbuch der klassischen Mechanik zu finden, z. B. GOLDSTEIN ([2]), LANDAU u. LIFSCHITZ ([3]). Die Newtonsche Gleichung (1) liefert mit dem speziellen Kraftgesetz

$$\vec{F}(\vec{r}) = \bar{F}(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (2)$$

Kegelschnitte als Bahnen, die sich durch

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + 2\varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (3)$$

darstellen lassen. Ist m die (reduzierte) Masse, E die Gesamtenergie und L der Gesamtdrehimpuls (beides Konstante der Bewegung), so gilt

$$p = \frac{L^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}, \quad (4)$$

wobei sich die Anfangsbedingungen entweder durch Angabe von E und L definieren lassen oder durch diejenige von r_0 , v_0 und des Winkels δ_0 zwischen beiden. Im Film werden r_0 , v_0 und δ_0 variiert, und es gilt

$$E = m/2 v_0^2 \qquad L = m r_0 v_0 \sin\delta_0 \quad (5)$$

Zur Entstehung des Films

Der Film gehört zu einer Serie von Filmen (SCHLIER et al. [5] - [10]), die vollautomatisch computer-unterstützt gezeichnet und abfotografiert wurden. Hierzu wurde eine Kamera mit der Möglichkeit der Einzelbildschaltung vor einen Speicherbildschirm gesetzt und ein Programm geschrieben, das Bild für Bild auf den Bildschirm zeichnet, die Kamera auslöst und schließlich den Bildschirm löscht (BENZ [1], vgl. a. SIEVERS [4]). Die Benutzung eines Prozeßrechners (hier: Dietz Mincal 621) erleichtert die dazu notwendigen Direktanschlüsse von Bildschirm und Kamera und die Realzeit-Programmierung. Auch das Zeichnen der Titel und die Buchführung über die Film-bilder geschehen computer-gesteuert.

Erläuterungen zum Film

Wortlaut des gesprochenen Kommentars¹

1. Keplersches Gesetz: Die Planetenbahnen sind Kegelschnitte

Art und Form der Kegelschnitte

Anfangsbedingungen

Veränderung der Anfangsgeschwindigkeit v_0

Das erste Gesetz wird an 3 Serien von Bahnen demonstriert. In der ersten wird r_0 festgehalten, v_0 steht senkrecht dazu und wird von kleinen nach großen Werten variiert.

¹ Die *Kursiv*-Texte entsprechen den Zwischentiteln im Film. - Die eingerückten Abschnitte in Kleindruck geben zusätzliche Informationen.

Man kann den Betrag der Anfangsgeschwindigkeit des Planeten bei der Bewegung um die Sonne ändern, die Bewegungsrichtung und den Sonnenabstand dagegen beibehalten.

Hier befindet sich die Sonne im linken Brennpunkt einer kleinen Ellipse. Bei einer bestimmten Geschwindigkeit entsteht eine Kreisbahn.

Für die Kreisbahn gilt $\epsilon = 0$, die spezielle Anfangsbedingung dazu lautet $mv_0^2 = \alpha/r_0$.

Sämtliche Planetenbahnen werden durch ein- und dieselbe Differentialgleichung beschrieben.

Die Art der resultierenden Kurve hängt ab vom Ort des Planeten und seiner Geschwindigkeit im Zeitpunkt des Beginns seiner Bewegung.

Maßstabsänderung 1: 2

Hier entsteht eine etwas langgestreckte Ellipse, deren einer Brennpunkt rechts liegt. Man erkennt deutlich, daß der Planet sich in Sonnennähe schneller bewegt als in Sonnenferne.

Bei noch größerer Geschwindigkeit verläßt der Planet schließlich das Sonnensystem auf einer Hyperbelbahn.

Hier im Vergleich zu einer Ellipse.

Veränderung der Richtung von V_0

Startet man mit nichtorthogonalem \vec{r}_0, \vec{V}_0 , so ist der Startpunkt weder mit dem Perihel (r_{min}) noch mit dem Aphel (r_{max}) identisch.

Hier beginnt der Planet seine Bewegung wiederum senkrecht zur Verbindungslinie mit der Sonne.

Die Bewegung kann jedoch auch schräg zu dieser Richtung beginnen, etwa um $+60^\circ$ gedreht.

Es resultiert dann eine wesentlich stärker gestreckte Ellipse. Hier beide zum Vergleich (Abb. 1). Dasselbe gilt selbstverständlich auch in der anderen Richtung, um -60° gedreht.

Es entsteht wieder eine flachere Ellipse.

Die Beträge der Geschwindigkeit sind gleich, nur ihre Richtungen sind verschieden.

Veränderung des Sonnenabstandes R_0

Bei diesen und den folgenden Beispielen wird die Geschwindigkeit konstant gehalten. Im ersten Beispiel befindet sich die Sonne wieder im rechten Brennpunkt.

Die nächste Kurve ist eine Kreisbahn.

Beginnt die Bewegung in noch größerem Abstand, dann entsteht wieder eine Ellipse, bei der die Sonne im linken Brennpunkt steht. Bei wachsendem Sonnenabstand und konstanter Geschwindigkeit ergibt sich schließlich eine Hyperbelbahn.

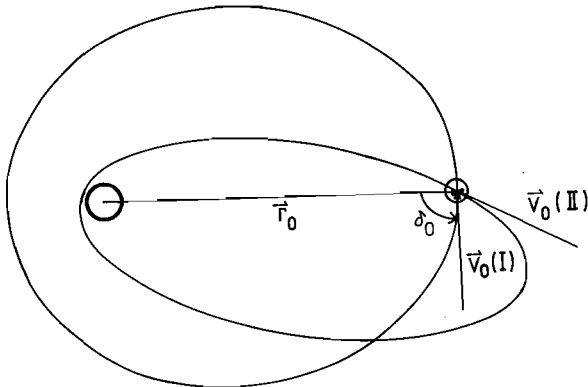


Abb. 1. Zwei Keplerellipsen mit eingezeichneter Anfangsbedingung. Verändert

ist nur der Winkel δ_0 zwischen Anfangsabstand \vec{r}_0 und Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 . Energie und Umlaufzeiten der Bahnen sind gleich!

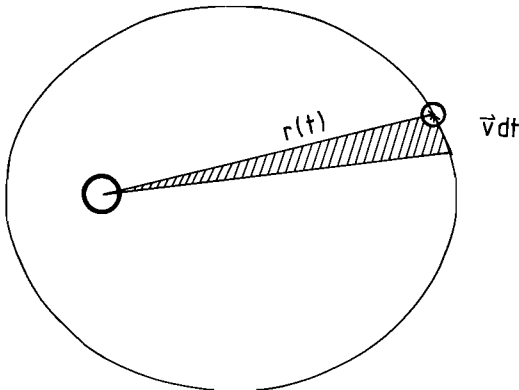


Abb. 2. Demonstration des

Flächensatzes: Die schraffierte Fläche ist $\frac{1}{2} \vec{r}(t) \times \vec{v} dt = \frac{1}{2m} \vec{L} dt$, welches für festes dt konstant ist

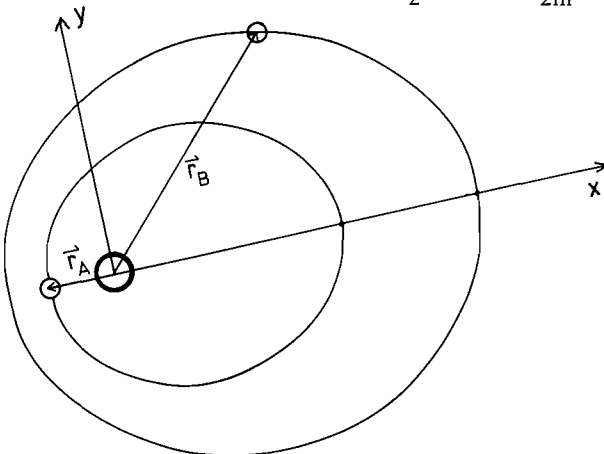


Abb. 3. Demonstration des dritten Keplerschen Gesetzes: Der innere Planet (A)

ist gleichzeitig mit dem äußeren (B) auf der X-Achse gestartet, er hat jedoch wegen seiner halb so großen Umlaufzeit schon einen größeren Weg zurückgelegt als der äußere

2. Keplersches Gesetz:

Der Drehimpuls um die Sonne ist eine Konstante

Das zweite Keplersche Gesetz besagt: Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in der Zeiteinheit, z. B. pro Monat, gleichgroße Flächen (Abb. 2).

Diese Flächen sind hier im Bild gezeigt.

Der moderne Physiker formuliert das zweite Keplersche Gesetz anders: Der Drehimpuls des Planeten um die Sonne ist eine Konstante. Dies folgt aus der Tatsache, daß zwischen Planet und Sonne eine Zentralkraft wirkt.

Das zweite Gesetz ist also das einzige, das nicht nur für den Fall des speziellen Zentralpotentials $V = -\alpha/r$ gilt, sondern für jedes Zentralfeld.

3. Keplersches Gesetz:

$$T^2 \sim A^3$$

Das dritte Keplersche Gesetz sagt schließlich etwas aus über die Geschwindigkeit, mit der der Umlauf erfolgt:

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen der Planetenbahnen (Abb. 3).

Das Gesetz ist übrigens eine Näherung, die nur im Grenzfall unendlich schwerer Sonne exakt ist (vgl. GOLDSTEIN [2]). Im Film ist nur ein Paar von Bahnen gezeigt; der Einfachheit halber gilt:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{1}$$

Hier ist das Verhältnis der Umlaufzeiten = 2.

Für das Verhältnis der großen Halbachsen erhält man $\frac{d_1}{d_2} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{2^2}$

Die Planeten bewegen sich mit entsprechenden Geschwindigkeiten. Zur Verdeutlichung werden sie hier nach jedem Umlauf kurz angehalten.

English Version of the Spoken Commentary¹

1. Keplersches Gesetz: Die Planetenbahnen sind Kegelschnitte

Art und Form der Kegelschnitte

Anfangsbedingungen

Veränderung der Anfangsgeschwindigkeit V_0

(Kepler's Laws: First law: The planetary orbits are conic sections. Kind and shape of the conic sections, initial parameters, variation of the initial velocity V_0)

The kind and the shape of the conic section depend on the initial parameters of the planet's trajectory.

¹ The passages in *italics* correspond with the subtitles in the film.

One may vary the absolute value of the initial velocity keeping its direction and the solar distance constant.

Here, the sun is in the left focus of a small ellipse.

A certain velocity results in a circular orbit.

These examples show that, even if all motions follow from one differential equation, each single trajectory is dependent on the initial position and initial velocity of the planet.

Maßstabsänderung 1:2

(Variation of scale 1:2)

Here, a somewhat elongated ellipse develops with the sun in the focus on the right.

It can clearly be seen that the planet moves faster near the sun than far from it.

Starting with still higher velocity the planet eventually leaves the solar system on a hyperbolic trajectory, here compared to an ellipse.

Veränderung der Richtung von V_0

(Variation of the direction of V_0)

Again, the starting direction makes a right angle with the line connecting sun and planet.

However, this angle may be also acute, for instance +60 degrees.

In this case a much more elongated ellipse results.

Here, both can be compared.

Obviously the same is true in the other direction, i. e. -60 degrees.

The absolute value of the velocity is still the same, only the directions vary.

Again a flat ellipse results.

Here compared to the first one.

Veränderung des Sonnenabstandes R_0

(Variation of the solar distance R_0)

The third parameter to be varied is the initial solar distance.

In this and the following examples the initial velocity vector is kept constant.

In the first example the sun is in the right focus.

The next orbit is circular.

If one starts the trajectory at a still greater distance, again an ellipse results, but the sun is now in the left focus.

Increasing the initial distance further eventually results in a hyperbolic trajectory.

2. Keplersches Gesetz:

Der Drehimpuls um die Sonne ist eine Konstante

(Kepler's 2nd law: The angular momentum with respect to the sun is constant)

This means, that the position vector of a planet relative to the sun sweeps out equal areas of the ellipse in equal times.

These areas are shown here.

A modern physicist generally formulates this law differently:

The angular momentum of the planet with respect to the sun is constant.

This follows from the existence of a central force between sun and planet.

3. Keplersches Gesetz:

$$T^2 \sim A^3$$

(Kepler's 3rd law)

Kepler's third law tells us something about the periods of planetary revolution: The squares of the periods of revolution are proportional to the cubes of the semimajor axes of planetary orbits.

Here, the ratio of the two periods is two.

For the ratio of the semimajor axes one gets two to the two-thirds power or cubic root of two squared.

The planets are moving with corresponding velocities.

To make the situation clearer in the picture they are stopped after each revolution.

Literatur

- [1] BENZ, A.: Rechnerunterstützte Herstellung von Lehrfilmen. Zulassungsarbeit für das Staatsexamen, Freiburg 1971.
- [2] GOLDSTEIN, H.: Klassische Mechanik, 4. Aufl., Wiesbaden 1976.
- [3] LANDAU, L. D., u. E. M. LIFSCHITZ: Mechanik. 9. Aufl., Berlin 1979.
- [4] SIEVERS, W.: Computer-Film als Mittel zur anschaulichen Darstellung von Stoßprozessen am Beispiel der $H^+ + D_2$ -Reaktion. Zulassungsarbeit für das Staatsexamen, Freiburg 1978.

Filmveröffentlichungen

- [5] SCHLIER, Ch., A. BENZ und INST. WISS. FILM: Signalextraktion durch Mittelwertbildung. Film C 1285 des IWF, Göttingen 1978.
- [6] SCHLIER, Ch., G. LODE und INST. WISS. FILM: Diffusion in Gasen. Film C 1325 des IWF, Göttingen 1979.
- [7] SCHLIER, Ch., A. SANDLER und INST. WISS. FILM: Entstehung und Klassifikation von Wellen. Film C 1287 des IWF, Göttingen 1978.
- [8] SCHLIER, Ch., A. SANDLER und INST. WISS. FILM: Klassische Atom-Atomstreuung. Film C 1291 des IWF, Göttingen 1978.
- [9] SCHLIER, Ch., W. SIEVERS und INST. WISS. FILM: Stöße von Protonen auf schweren Wasserstoff. Film C 1330 des IWF, Göttingen 1979.
- [10] SCHLIER, Ch., U. WEISHAAR und INST. WISS. FILM: Orbiting-Stöße von Atomen. Film C 1329 des IWF, Göttingen 1979.