

INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM

Wissenschaftlicher Film C 614/1953

Aus dem Physikalischen Staatsinstitut Hamburg
und dem Institut für den Wissenschaftlichen Film, Göttingen

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

Von

Dr. E. DAVID und Dr. G. BEKOW

Mit 5 Abbildungen

GÖTTINGEN 1959

Aus dem Physikalischen Staatsinstitut Hamburg
und dem Institut für den Wissenschaftlichen Film, Göttingen

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

Von Dr. E. DAVID und Dr. G. BEKOW

Einleitend werden in Zeichentrickaufnahmen die Begriffe Gruppen- und Phasengeschwindigkeit veranschaulicht. Realaufnahmen von Wasserwellen bieten ein Beispiel, an dem in der Natur ein erheblicher Unterschied zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit beobachtet werden kann; durch Mitbewegen des Beobachters mit der einen oder der anderen Geschwindigkeit wird die Erscheinung besonders augenfällig. Weitere Trickaufnahmen zeigen, daß sich die Wellengruppe durch Überlagerung von unbegrenzten Wellenzügen darstellen läßt. Das Verhalten der Wellengruppe wird an der Überlagerungsfigur von zwei Wellenzügen erläutert: Immer dann, wenn Dispersion vorliegt, d. h. wenn die Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängt, ergibt die Superposition eine von der Phasengeschwindigkeit abweichende Gruppengeschwindigkeit.

I. Allgemeine Vorbemerkungen

I. Naturvorgänge mit unterschiedlicher Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

Die Wasserwellen stellen den einzigen natürlichen Wellenvorgang dar, bei dem man ohne jedes Hilfsmittel den Unterschied von Gruppen-¹⁾ und Phasengeschwindigkeiten erkennen kann. (Ad hoc konstruierte Demonstrationseinrichtungen, die entweder nur kinematisch, bildmäßig oder auch in einer geeignet aus Massen und elastischen Verbindungsgliedern zusammengebauten Anordnung dynamisch den Unterschied zeigen, können wir wohl als künstlich und deshalb uninteressant aus der Betrachtung ausschließen.) Aber es gibt noch eine Reihe von Wellenvorgängen, bei denen die Geschwindigkeitsunterschiede eine unter Umständen sogar praktische Rolle spielen.

¹⁾ Gelegentlich wird mit der gleichen Bedeutung die Bezeichnung „Signalgeschwindigkeit“ benutzt.

Schon kaum noch direkt beobachtbar ist der im entgegengesetzten Sinne wie bei den Scherwellen auftretende Geschwindigkeitsunterschied bei Kapillarwellen auf Flüssigkeitsoberflächen.

Bei elastischen Wellen, einerlei ob es sich um niederfrequente Schwingungen oder Erschütterungen oder um den akustischen Bereich handelt, tritt meist keine Dispersion, also auch kein Geschwindigkeitsunterschied von Phase und Gruppe auf. Eine Ausnahme machen im niederfrequenten Bereich die Erdbeben-Oberflächenwellen, Wellen vom sogenannten LOVE-Typus, für deren Verständnis die Geschwindigkeitsverhältnisse wesentlich sind. Auf der anderen Seite gibt es im Ultraschallgebiet vielfach Absorptionen und damit zwangsläufig verbundene Dispersionen. Die im Experiment ins Auge springende Erscheinung ist hier aber die Absorption; die Dispersion oder gar die Abweichung der Gruppengeschwindigkeit sind dagegen schwieriger experimentell zu fassen.

Lichtwellen zeigen, soweit sie nicht im Vakuum, sondern in Materie verlaufen, stets mehr oder weniger Dispersion. Es ist also nicht unwichtig, daß man bei Geschwindigkeitsmessungen grundsätzlich die Gruppengeschwindigkeit mißt. Auch wenn man unbeachtet ließe, daß bei einer Lichtwelle, z. B. in Glas, die Energie mit Gruppengeschwindigkeit wandert, käme man auf Widersprüche.

Bei langen elektrischen Wellen sind die Gruppengeschwindigkeitseffekte bei der Ausbreitung in der Atmosphäre für die Nachrichtenübermittlung wohl ohne praktische Bedeutung. Eine gewisse Dispersion ist zwar besonders in der Ionosphäre selbstverständlich gegeben. Es ist bei der Ermittlung ihrer Höhe nach der Echomethode wesentlich, für den Lauf der Impulse die Gruppengeschwindigkeit einzusetzen. Im Gegensatz zur freien Atmosphäre spielen bei der Übertragung von Signalen über Kabel und Hohlleiter sowie bei deren Verstärkung in Wanderfeldröhren Dispersion und Geschwindigkeitsunterschiede eine dem Fernmeldetechniker meist unerwünschte Rolle.

2. Bestimmung der Gruppengeschwindigkeit durch Superposition

Der Film erklärt das Verhalten der Gruppengeschwindigkeit an dem einfachsten Beispiel, der Überlagerung zweier unendlicher Sinuswellen. Aber er deutet schon an, daß man zur Darstellung einer „richtigen“ Gruppe mehr Wellenzüge überlagern muß, genau genommen unendlich viele in Form eines FOURIER-Integrals.

Die Einzelwelle werde in der Form dargestellt:

$$y = \sin(kx - \omega t) \quad \text{bzw.} \quad y = \cos(kx - \omega t)$$

oder besser in komplexer Zusammenfassung:

$$y = e^{i(kx - \omega t)},$$

mit x : Koordinate in Fortpflanzungsrichtung, t : Zeit, y : Ausschwingung, $k = 2\pi/\lambda$: Wellenzahl, $\omega = 2\pi\nu$: Kreisfrequenz.

Die Phasengeschwindigkeit einer solchen Welle, d. h. die Geschwindigkeit eines Punktes, an dem das Argument $(kx - \omega t) = \text{Const.}$ ist, beträgt:

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} (= v\lambda). \quad (1)$$

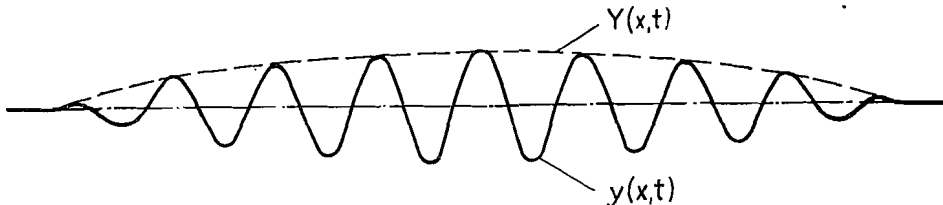


Abb. 1. Wellengruppe und ihre Amplitudenfunktion $Y(x, t)$

Eine Gruppe möge dargestellt werden mit Hilfe der relativ zu der Wellenfunktion langsam und stetig veränderlichen Amplitudenfunktion $Y(x, t)$ (vgl. Abb. 1):

$$y(x, t) = Y(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

Zur Zeit $t = 0$ ergibt die FOURIER-Analyse dieser Gruppe nach Partialwellen deren Amplituden- und Phasenverteilung:

$$A(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} y(x, 0) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x, 0) e^{i(k_0 - k)x} dx.$$

Bei der vorausgesetzten langsamen Veränderlichkeit von Y ergeben sich wesentliche A nur für kleine Differenzen $(k - k_0)$. Für größere $(k - k_0)$ konvergiert A sehr rasch gegen Null.

Für einen beliebigen Zeitpunkt läßt sich die Wellengruppe aus den unendlichen Partialwellen

$$A(k) e^{i(kx - \omega t)}$$

durch das FOURIER-Integral zusammensetzen:

$$Y(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk.$$

Die Amplitudenfunktion $Y(x, t)$, deren Verschiebungsgeschwindigkeit die Gruppengeschwindigkeit ist, ergibt sich also zu:

$$Y(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i[(k - k_0)x - (\omega - \omega_0)t]} dk.$$

Im Exponenten werde entwickelt:

$$\omega - \omega_0 = (k - k_0) \frac{d\omega}{dk} + \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \frac{d^2\omega}{dk^2} + \dots$$

Da $A(k)$ nur für kleine $(k - k_0)$ von Null verschieden wird, kann das quadratische Glied vernachlässigt werden. Die Verschiebungsgeschwindigkeit der

Einhüllenden $Y(t)$ entspricht der des Exponenten $i(k - k_0) \left(x - \frac{d\omega}{dk} t - \dots \right)$,

denn die anderen Teile des Integrals enthalten x und t nicht.

Mithin wird die Gruppengeschwindigkeit:

$$v_{\text{Gr}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (2)$$

Das quadratische und die noch höheren Glieder in $(k - k_0)$ ändern bei längerem Weiterlaufen die Form der Funktion Y . Der Endeffekt wird stets ein Auseinanderfließen der Gruppe sein. Diese Störung ist dann besonders gering, wenn bei der mittleren Frequenz der Gruppe

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} = 0 \quad (3)$$

ist, d.h. bei Extremwerten der Gruppengeschwindigkeit — Minima oder Maxima — bleiben Gruppen besonders gut beisammen.

Gleichung (2) kann noch umgeformt werden, um die Beziehungen zum Film herzustellen. Dort fällt ins Auge die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge. Nach (1) gilt:

$$\frac{dv_{\text{Ph}}}{d\lambda} = \frac{dv}{d\lambda} \lambda + v.$$

In (2) werde ω und k durch v und λ ersetzt:

$$v_{\text{Gr}} = -\lambda^2 \frac{dv}{d\lambda}.$$

Nach Einfügen von $dv/d\lambda$ aus der Gleichung zuvor ergibt sich die an Hand der Filmbilder leicht verifizierbare Beziehung:

$$v_{\text{Gr}} = v_{\text{Ph}} - \lambda \frac{dv_{\text{Ph}}}{d\lambda}. \quad (4)$$

3. Beispiele

a) Wellen auf einer Flüssigkeitsoberfläche

Für die Phasengeschwindigkeit gilt bei genügend großer Tiefe ($> \lambda$):

$$v_{\text{Ph}} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\alpha}{\rho} k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{2\pi}{\lambda}},$$

mit Schwerkbeschleunigung g , Oberflächenspannung α , Dichte ρ . Bei Schwerewellen, d.h. kleinem k , ist der erste Summand unter der Wurzel ausschlaggebend, bei Kapillarwellen der zweite. Die Gruppengeschwindigkeit ergibt sich zu:

$$v_{\text{Gr}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\rho} \frac{2\pi}{\lambda}}{\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{2\pi}{\lambda}}}.$$

¹⁾ Wie aus dieser Gleichung hervorgeht, kann v_{Gr} auch Null oder negativ werden, wenn $dv_{\text{Ph}}/d\lambda$ genügend groß und positiv ist. Diese zunächst widersinnig erscheinende Möglichkeit der entgegengesetzten Laufrichtung von Phase und Gruppe ist sogar technisch benutzt worden im „Carcinotron“ (vom griech. *Carcinoma*, Krebs, der Rückwärtslaufende), einer Verstärker- und Senderöhre für hohe Frequenzen.

Für Kapillarwellen tendiert v_{Gr} gegen $\frac{3}{2} v_{Ph}$, für Schwerewellen gegen $\frac{1}{2} v_{Ph}$. Den Verlauf bei Wasser zeigt Abb. 2. Das Minimum der Phasengeschwindigkeit liegt bei $\lambda = 1,73$ cm und beträgt 23,2 cm/s. Die Gruppengeschwindigkeit hat ihr Minimum von 17,9 cm/s bei $\lambda = 4,40$ cm, wie man durch Differenzieren unschwer ermittelt. Daß hier Gruppen besonders gut erhalten bleiben sollen, ist wegen der Dämpfung und der Nichtlinearitäten bei Flüssigkeitswellen etwas größerer Amplitude ohne jede Bedeutung.

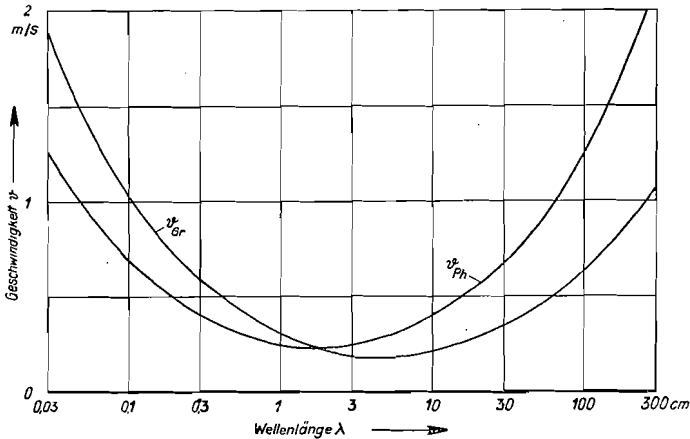


Abb. 2. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit von Wasserwellen

b) Erdbebenwellen

Für Erdbeben-Oberflächenwellen vom LOVE-Typus, d.h. transversale Wellen, deren Amplitude in größerer Tiefe gegen Null geht, zeigt Abb. 3 als Beispiel den Verlauf der Geschwindigkeiten, wie man ihn im Gebiet der südlichen Ostsee vorfindet. Daß hier aus praktischen Gründen die Schwingungsdauer T an Stelle der Wellenlänge λ als Bezugsgröße benutzt wurde, ist unwesentlich. Die ohne weiteres mögliche Umrechnung würde das Bild qualitativ gar nicht ändern.

In Abb. 3 sind die Werte v_{Gr} beobachtet, v_{Ph} daraus berechnet. Man kann dieses schon etwas komplizierte Geschwindigkeitsverhalten nach MENZEL [3]¹⁾ quantitativ verstehen durch die Annahme folgender Schichtung der Erdkruste in dem betreffenden Gebiet: Oben 27 km mit Schallgeschwindigkeit 2,26 km/s, darunter etwa 40 km mit 3,03 km/s, noch tiefer 3,36 km/s Schallgeschwindigkeit.

Die Bedingung (3) begünstigt hier Gruppen mit den Schwingungsdauern von etwa 13 s und 18 s. So kann man es verstehen, daß tatsächlich solche Perioden bevorzugt zur Beobachtung kommen.

¹⁾ Siehe Literaturverzeichnis am Ende des Textes.

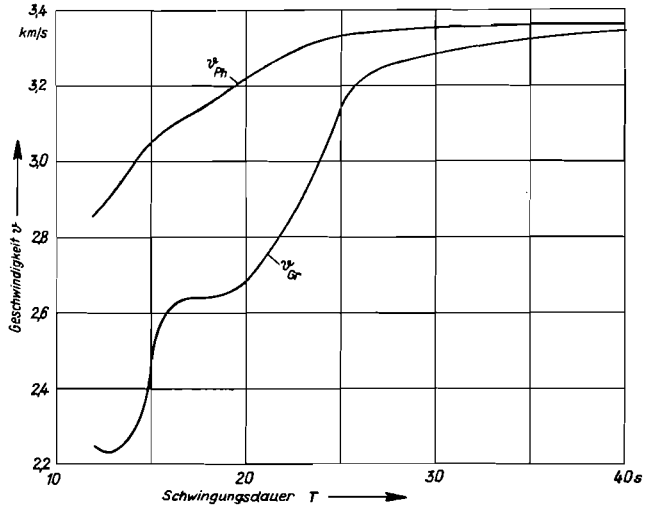


Abb. 3. Beobachtete Gruppengeschwindigkeit und daraus berechnete Phasengeschwindigkeit von Erdbeben-Oberflächenwellen vom Love-Typus

e) Lichtwellen

Bei Lichtwellen gilt für die Phasengeschwindigkeit bekanntlich:

$$v_{Ph} = \frac{c}{n}.$$

Daraus folgt nach (4) die Gruppengeschwindigkeit

$$v_{Gr} = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right).$$

Bei Gläsern findet man die Gruppengeschwindigkeit um 1,5 bis 8% kleiner als die Phasengeschwindigkeit; nur bei Schwefelkohlenstoff wird an der Grenze des Violetten eine Differenz von 16% erreicht. Anomale Dispersion und Brechungsindizes < 1 treten nur in Verbindung mit Absorption auf, so daß unsere Berechnungen hier nicht zureichend sind.

d) Elektrische Wellen

In der Ionosphäre kommen durch die freien Elektronen (Anzahl N pro Volumeneinheit, Elektronenladung und -masse e bzw. m) Brechungsindizes unter 1, also Phasengeschwindigkeiten größer als c zustande. Es ist dort, wenn wir in erster Näherung die Dämpfung durch die Zusammenstöße der Elektronen und die Doppelbrechung durch das magnetische Erdfeld vernachlässigen,

$$\varepsilon = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} < 1, \quad v_{Ph} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \left(\text{d.h. } \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}}} \right).$$

Aber die Gruppengeschwindigkeit ergibt sich kleiner als c , wie es sein muß:

$$v_{\text{Gr}} = 1 / \frac{dk}{d\omega} = c \sqrt{1 - \frac{N^2 e^2}{\epsilon_0 m \omega^2}}.$$

ϵ kann, je nach Größe von ω , jeden Wert unterhalb 1 bis zu negativen Werten hin annehmen. Bei diesen ist allerdings keine Ausbreitung von Sinuswellen mehr möglich. Schräg auf die Fläche $\epsilon = 0$ einfallende Wellen werden geometrisch-optisch abgelenkt, ohne die Fläche zu erreichen. Senkrecht einfallende Wellen werden reflektiert. Die Wellenfunktion sieht dabei im eingeschwungenen Zustand folgendermaßen aus: Im „erlaubten“ Gebiet mit $\epsilon > 0$ nimmt mit fallendem ϵ die Wellenlänge zu. Auch die Amplitude der elektrischen Feldstärke nimmt zu (was nebenbei zu erhöhter Absorption Anlaß gibt). Konstant bleibt (ohne Berücksichtigung der Absorption) der POYNTING-Vektor, also $|\mathcal{E}| \cdot |\mathcal{H}|$; deshalb fällt die Amplitude der magnetischen Feldstärke ab. Ankommende und reflektierte Welle bilden miteinander stehende Schwingungen. Diese werden im „verbotenen“ Gebiet mit $\epsilon < 0$ durch eine stehende Schwingung mit räumlich konstanter Phase abgeschlossen. Deren Amplitudenverteilung ist nicht mehr sinusartig, sondern fällt exponentiell ins „verbotene“ Gebiet hinein ab.

e) DE BROGLIESche Materiewellen

Die DE BROGLIESchen Materiewellen zeigen formal ein ganz entsprechendes Verhalten von Gruppen- und Phasengeschwindigkeit. Wenn man mit p den Impuls bezeichnet, dann sind Wellenlänge und Frequenz gegeben durch:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad E = h\nu, \quad \nu = \frac{E}{h} = \frac{m c^2}{h}$$

bzw.

$$k = \frac{2\pi p}{h} = \frac{2\pi m v}{h}, \quad \omega = \frac{2\pi m c^2}{h}, \quad \text{mit } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Die Phasengeschwindigkeit beträgt:

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c^2}{v}.$$

Die Gruppengeschwindigkeit ergibt sich als

$$v_{\text{Gr}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dv} / \frac{dk}{dv} = v.$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist also, wie es sein muß, die wirkliche Teilchengeschwindigkeit v .

4. Energiestrom in der Welle

Die bisherige mathematisch-formale Behandlung setzte physikalisch einzig das Superpositionsprinzip voraus. Bei den tatsächlich nur formalen Wellen der Wellenmechanik haben wir damit auch bereits alles

erfaßt. Dagegen können wir bei den anderen, den klassisch physikalischen Wellenvorgängen ein noch tieferes Verständnis durch eine Analyse des Energietransports gewinnen.

Bei der Betrachtung einer Gruppe von Wasserwellen wirkt es immer wieder verblüffend, daß am Kopf der Gruppe die Wellen ins Nichts verschwinden, am Schwanz dagegen sogar scheinbar aus dem Nichts entstehen. Man hat den Eindruck, das widerspräche dem Energiesatz.

a) Schallwelle als Gegenbeispiel

Als einfacher nehmen wir zunächst ein Gegenbeispiel, etwa eine normale Schallwelle. Es ist dabei einerlei, ob wir eine longitudinale oder eine transversale Welle betrachten; im zweiten Falle sind nur Verrückungen, Geschwindigkeiten und Kräfte transversal anstatt longitudinal anzusetzen, und der longitudinale Druck ist durch die transversale Scherspannung zu ersetzen.

Abb. 4 zeigt qualitativ den Verlauf der verschiedenen physikalischen Größen in einer nach rechts laufenden Schallwelle. Aus der oberen, die linearen Größen enthaltenden Darstellung sind darunter die Energiedichte (d. i. die Summe der miteinander gleichen kinetischen Energiedichte $\frac{1}{2} \rho v^2$ und Kompressions-Energiedichte $\frac{1}{2} E \Delta p^2$) sowie die Energiestromdichte $v \Delta p$ aufgetragen. Wir sehen: Energiedichte $\times v_{Ph}$, d. h. die zum Transport dieser Energiedichte mit der Geschwindigkeit v_{Ph} erforderliche, und die wirklich vorhandene Energiestromdichte sind gleich. Gehen wir mit der Phase der Welle mit, so wird an einem Ort in der Welle vorhandene Energie auch an diesem Ort transportiert.

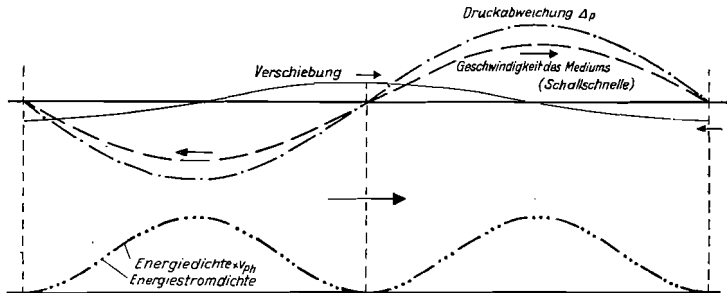


Abb. 4. Verlauf der physikalischen Größen in einer nach rechts laufenden Schallwelle

Durch die Knoten tritt keine Energie von einem Teil der Welle in den nächsten hindurch. Jeder Teil der Welle (genauer jede senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung herausgeschnittene Scheibe) ist für sich allein existenzfähig.

Analoge Verhältnisse finden wir bei elektrischen oder Lichtwellen im Vakuum. Hier ist wieder die Energiedichte multipliziert mit der Geschwindigkeit c in Übereinstimmung mit dem Energiestrom. Das muß sich grundsätzlich ändern, wenn wir z. B. Schwerewellen auf einer Flüssigkeitsoberfläche betrachten.

b) Schwerewellen auf einer Flüssigkeit

Der Einfachheit halber nehmen wir kleine Amplitude a und große Tiefe an. Abb. 5 zeigt das Bild der Welle und die Bewegungen darin. Nach LAMB können wir für eine solche Welle die folgenden Ansätze machen¹⁾.

Wir integrieren Energien und Energieströme über y , so daß diese Größen pro Flächen- bzw. Längeneinheit der Oberfläche gelten.

Elongation der Oberfläche:

$$\eta = a \sin(kx - \omega t)$$

Geschwindigkeitspotential:

$$\varphi = \frac{\alpha \omega}{k} e^{ky} \cos(kx - \omega t).$$

Abweichung vom ungestörten Druck:

$$\Delta p = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\rho \alpha \omega^2}{k} e^{ky} \sin(kx - \omega t).$$

Oberfläche:

$$\Delta p + \rho g \eta = 0 \rightarrow \frac{\omega^2}{k} = g \quad (\text{da } e^{ky} \approx 1).$$

Potentielle Energie:

$$W_{\text{pot}} = \rho g \int_0^\eta y \, dy = \frac{1}{2} \rho g \eta^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho \alpha^2 \omega^2}{k} \sin^2(kx - \omega t).$$

Kinetische Energie:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^{\eta \approx 0} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dy = \frac{1}{4} \frac{\rho \alpha^2 \omega^2}{k}.$$

Energiestrom:

$$S = \int_{-\infty}^{\eta \approx 0} \Delta p \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dy = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} \frac{\rho \alpha^2 \omega^2}{k} \sin^2(kx - \omega t).$$

Energie wird also transportiert in dem Gebiete unter dem Wellenberg bei Überdruck und vorwärts gerichteter Strömung sowie unter dem Wellental, wo aus dem negativen Vorzeichen beider Größen wieder ein positiver Strom nach rechts resultiert. Aber in den Knoten der Welle findet sich auch kinetische Energie. Für sie fehlt jeglicher Transport; sie bleibt also zurück gegenüber der Bewegung mit Phasengeschwindigkeit v_{ph} .

In dem unteren Teil von Abb. 5 sind nach den Formeln die verschiedenen Größen dargestellt. Wir sehen: es fehlt ein konstanter, vom

¹⁾ Siehe H. LAMB [2], § 229, § 230 in der 1. Aufl. Gl. (6) u. (7), und § 235.

Ort in der Welle unabhängiger Energiestrom, um die in der Welle vorhandene Energie mit der Geschwindigkeit v_{ph} zu transportieren. Daß dieser Fehlbetrag konstant sein muß, ist eigentlich selbstverständlich, denn sonst würde ja an irgendwelchen Stellen der Welle eine Anhäufung an anderen eine Verarmung an Energie eintreten. Dieser konstante, gegen die Phasenbewegung zurückbleibende Energiestrom zehrt also am vorderen Ende einer Gruppe die Wellen auf und läßt am hinteren Ende neue dafür entstehen.

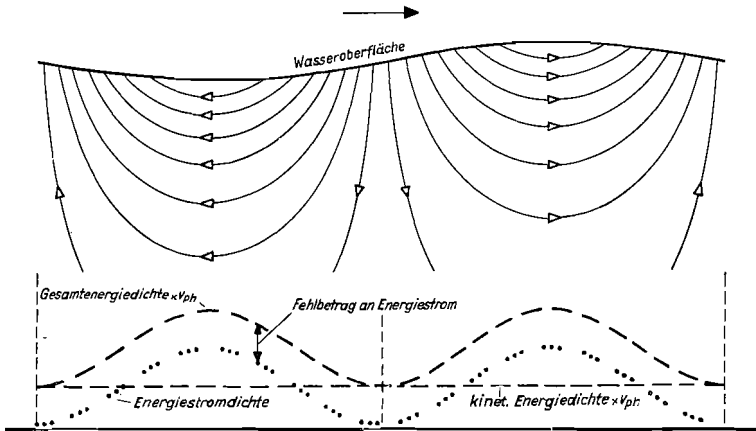


Abb. 5. Schwerewelle auf einer Flüssigkeit

Oben: Stromlinienbild der Welle im Querschnitt
Unten: Energiedichte und Energiestromdichte

Kapillarwellen zeigen bekanntlich ein gerade umgekehrtes Verhalten. Bei kleiner Amplitude gilt dennoch das Bild der Bewegung nach Abb. 5 auch für Kapillarwellen. Zum inneren Energiestrom kommt aber jetzt der Energietransport durch die gespannte Oberfläche hinzu. Er bringt gerade denselben Überschuß an Energiestrom, der bei den Schwerewellen als Fehlbetrag auftrat. Deshalb geht die Gruppengeschwindigkeit von $v_{ph} - \frac{1}{2} v_{ph}$ auf $v_{ph} + \frac{1}{2} v_{ph}$ bei den Kapillarwellen.

Diejenigen Wellen, die Unterschiede von Gruppen- und Phasengeschwindigkeit zeigen, haben also keine richtigen Knoten. An keiner Stelle innerhalb der Welle gehen Energiedichte und Energiestrom beide auf Null, wie es bei den Wellen ohne Dispersion der Fall ist.

c) Elektrische Wellen

Als weiteres Beispiel sei noch eine elektrische Welle (oder eine Lichtwelle) in einem dispergierenden Medium betrachtet. Das Medium möge für die Frequenz ω der Welle die Dielektrizitätskonstante ϵ , dagegen die Permeabilität $\mu = 1$ haben.

Die Maxwell-Gleichungen¹⁾

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} (+ \mathfrak{J}), \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

reduzieren sich für eine in x -Richtung laufende, parallel zu y polarisierte elektrische Welle auf

$$- \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}, \quad - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t}.$$

Mit dem Ansatz

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_0 \sin(kx - \omega t) \quad (5)$$

ergeben sie erstens $v_{\text{Ph}} = \omega/k = c/\sqrt{\varepsilon}$, da $1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = c$ ist, und zweitens, daß die elektrische und magnetische Energiedichte gleich sind

$$W_{\text{el-dyn}} = \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{D}) + \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \mathfrak{H}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \mathfrak{E}_0^2 \sin^2(kx - \omega t). \quad (6)$$

Der Poynting-Vektor liefert den Energiestrom

$$\mathfrak{S}_x = [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_x = c/\sqrt{\varepsilon} \cdot \varepsilon \varepsilon_0 \mathfrak{E}_0^2 \sin^2(kx - \omega t). \quad (7)$$

Die Elektrodynamik verführt uns geradezu zu dem Fehlschluß, daß die Energie der Welle mit der Phasengeschwindigkeit $c/\sqrt{\varepsilon}$ transportiert werde. Was wurde hier vernachlässigt?

Die dielektrische Wirkung können wir bekanntlich im Rahmen der hier ausreichenden klassischen Elektronentheorie als Verschiebung von quasi-elastisch gebundenen Elektronen auffassen. Das Dielektrikum möge pro Volumeinheit N Elektronen enthalten, die mit der Eigenfrequenz ω_0 gebunden sind. Für ihre Verschiebung ξ gilt, wenn wir die rücktreibende Kraft durch Masse und Eigenfrequenz ausdrücken, die Differentialgleichung:

$$m \ddot{\xi} + m \omega_0^2 \xi = e \mathfrak{E}. \quad (8)$$

Die wirkende, polarisierende, d.h. die Elektronen verschiebende Feldstärke \mathfrak{E} bestimmt sich nach CLAUSIUS-MOSOTTI meist in guter Näherung zu²⁾:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E} + \frac{1}{3} \varepsilon_0 \cdot \mathfrak{P}. \quad (9)$$

Für die Polarisation gelten die Definitionsgleichungen:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{P} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P} = Ne\xi. \quad (10a, b)$$

Zunächst orientieren wir uns am statischen Fall, bei dem wir wissen, daß die gesamte durch das elektrische Feld in den Körper hineingebrachte Energie $\frac{1}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{D})$ beträgt. Diese Größe werde nach (9) und (10a) aufgeteilt in

$$\frac{1}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{D}) = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \mathfrak{E}^2 - \frac{1}{6} \varepsilon_0 \cdot \mathfrak{P}^2 + \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{P}). \quad (11)$$

¹⁾ Wir rechnen hier im Giorgi-System. Im Gauß-System wäre nur in den Maxwell-Gleichungen und beim Strahlungsstrom je ein Faktor c hinzuzufügen, ferner der Faktor 4π bei \mathfrak{P} . Dafür fallen ε_0 und μ_0 weg.

²⁾ Vgl. R. BECKER [1], § 22. Für das Folgende ist es übrigens bedeutungslos, wenn der Zahlenfaktor vor \mathfrak{P} einen anderen Wert hat; z.B. für die in der Ionosphäre gegebenen Bedingungen wäre er Null.

Die beiden ersten Summanden stellen die durch die Polarisation modifizierte Feldenergiedichte dar, denn der letzte Summand ist die (quasi-)mechanische potentielle Energie der verschobenen Elektronen. N gegen die rücktreibende Kraft $m\omega_0^2\xi$ (ξ = laufende Koordinate) bis zu einem bestimmten Endwert ξ verschobene Elektronen haben ja die potentielle Energie $\frac{1}{2}Nm\omega_0^2\xi^2$. Nach (8) mit $\ddot{\xi} = 0$ und (10b) ist dies gleich dem letzten Summanden.

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}Nm\omega_0^2\xi^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{F}\mathfrak{P}) \quad (12)$$

Wirkt statt eines statischen das Wechselfeld einer elektrischen Welle oder Lichtwelle polarisierend, so tritt eine Änderung durch das Glied $m\ddot{\xi}$ in (8) ein. Zunächst ist leicht aus den Gl. (8) bis (10) zu ersehen, daß die vorkommenden Vektoren sämtlich die Wellenabhängigkeit $\sin(kx - \omega t)$ bekommen und daß sämtliche Amplitudenvektoren $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{F}_0, \xi_0$ parallel \mathfrak{E}_0 liegen. Aus (8) folgt:

$$m(\omega_0^2 - \omega^2)\xi_0 = e\mathfrak{F}_0.$$

Skalare Multiplikation mit (10b) macht daraus:

$$\frac{1}{2}Nm(\omega_0^2 - \omega^2)\xi_0^2 \sin^2(kx - \omega t) = \frac{1}{2}(\mathfrak{F}\mathfrak{P}).$$

Da wie in (12) unverändert $W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}Nm\omega_0^2\xi^2$ ist, haben wir jetzt:

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}(\mathfrak{F}\mathfrak{P}) + \frac{1}{2}Nm\omega^2\xi_0^2 \sin^2(kx - \omega t). \quad (13)$$

Da ebenfalls unverändert die beiden ersten Glieder der rechten Seite von (11) die Feldenergie darstellen, fehlt also der letzte Summand von (13) in der Maxwell'schen Darstellung der Energiedichte nach (6).

Weiterhin haben die schwingenden Elektronen eine kinetische Energiedichte

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}Nm\dot{\xi}^2 = \frac{1}{2}Nm\omega^2\xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t). \quad (14)$$

Auch diese findet sich nicht in (6), denn $(\mathfrak{F}\mathfrak{S})$, in dem wir sie suchen könnten, hat ja wegen des vorausgesetzten $\mu = 1$ einfach seinen Vakuumwert¹⁾.

Die in (13) und (14) ermittelten Energiedichten sind ortsfeste Schwingungsenergien der Elektronen, die von sich aus keine Fortpflanzung zeigen. Die Summe dieser Energiedichten und der elektrodynamischen nach (6) muß vom Energiestrom (7) transportiert werden. Deshalb wird die Gruppengeschwindigkeit kleiner als die Phasengeschwindigkeit; wir könnten auch unschwer ermitteln, in welchem Verhältnis.

Gar nicht ohne weiteres finden wir dagegen allgemein den Ausdruck $d\omega/dk$ von Gl. (2) für die Gruppengeschwindigkeit wieder. Das ist nicht verwunderlich. Wir haben die Energiebetrachtungen ja für festes ω angestellt und müßten sie zum $d\omega/dk$ hin erst erweitern. Aber der Zweck

¹⁾ Man könnte versucht sein, zu schließen, daß die Elektrodynamik falsch ist. Tatsächlich wurde hier nur ihr Gültigkeitsbereich überschritten. Die schwingende Polarisation wurde in (5) bis (7) durch ein einfaches ε beschrieben, was nur beschränkt, z. B. bei der Phasenbewegung, zu richtigen Resultaten führt. Das nur für eine Frequenz ω angegebene ε kann ja nichts über die Frequenzabhängigkeit aussagen, die nach (2) für die Gruppengeschwindigkeit notwendig ist.

dieser Ausführungen war nicht eine zweite Ableitung dieses Ausdrucks, sondern wir wollten physikalisches Verständnis für den Unterschied zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit gewinnen.

Zur Herstellung des Films

Die Grundideen des vorliegenden Films sind übernommen von einem Film gleichen Titels, den P. H. AMMANN im Jahre 1937 auf Anregung von Prof. Dr. W. LENZ am Physikalischen Staatsinstitut Hamburg und am Schiffsbau-Laboratorium der Technischen Staatslehranstalten Hamburg als Staatsexamensarbeit unter Betreuung von Dr. E. DAVID angefertigt hat.

Für die Trickaufnahmen der Wellengruppen war es notwendig, den Bewegungsvorgang in eine größere Zahl von Bewegungsphasen zu zerlegen, da die Wellengruppe ihre Gestalt ständig ändert. Von jeder dieser Bewegungsphasen wurde eine Zeichnung angefertigt, die dann der Reihe nach mit der Filmkamera als sogenannter Phasentrick aufgenommen wurde, d. h. für jedes Einzelbild des Films wurde bei dieser Darstellung eine andere Zeichnung verwendet als für das vorhergehende. Da sich der Vorgang in diesem Fall periodisch wiederholt, genügt hier eine begrenzte Anzahl von Bewegungsphasen. Die Zeichnungen selbst wurden, ebenso wie die für die übrigen Trickdarstellungen, nach genau berechneten Kurven angefertigt.

Die Aufnahmen der Wasserwellen wurden in der Wasserbau-Versuchsanstalt der Technischen Hochschule Braunschweig mit freundlicher Unterstützung von Prof. Dr.-Ing. LEICHTWEISS und Dipl.-Ing. RÜHLAND durchgeführt. Die verwendete Versuchsrinne, deren Längsseiten mit Glaswänden versehen waren, hatte eine Länge von etwa 25 m und eine Breite von 0,70 m. Die Wassertiefe betrug etwa 0,60 m. Ein parabolisch geformter Schwimmkörper diente zur Erzeugung von kurzen Wellengruppen, bestehend aus 4—5 Einzelwellen mit einer Wellenlänge von etwa 0,75 m. Kamera und Scheinwerfer wurden auf einen fahrbaren Brückenkran montiert, dessen regelbare Fahrgeschwindigkeit es erlaubte, jeweils die Wellengruppe oder deren Phase im Blickfeld der Kamera zu behalten.

II. Erläuterungen zum Film

Der Film beginnt mit einer Zeichentrickdarstellung, mit der die Begriffe „Gruppengeschwindigkeit“ und „Phasengeschwindigkeit“ veranschaulicht werden. Im Bild erscheint die Figur einer Wellengruppe. Diese setzt sich für kurze Zeit in Bewegung. Betrachtet man die Dauer der Bewegung als Zeiteinheit, so ist der vom Gruppenkopf (oder auch vom Gruppenschwanz) zurückgelegte Weg ein Maß für die Gruppengeschwindigkeit v_{Gr} . Im Film wird der Weg des Gruppenkopfes aufgezeichnet und als Vektor v_{Gr} gekennzeichnet.

In entsprechender Weise entsteht der Vektor der Phasengeschwindigkeit v_{Ph} : Die Wellenfigur gleitet in ihre Ausgangslage zurück und wandert erneut um den gleichen Betrag. Diesmal wird die Bewegung eines Wellenberges verfolgt.

Wir betrachten den Fall:

Gruppengeschwindigkeit kleiner als Phasengeschwindigkeit¹⁾

Die Figur der Wellengruppe wandert in das Bild. Sobald sie bis in Bildmitte gelangt ist, wird sie von der Kamera begleitet und dadurch längere Zeit im Blickfeld des Betrachters behalten²⁾. Man beobachtet, daß am Gruppenschwanz ein Wellenberg (und Wellental) nach dem anderen entsteht, innerhalb der Gruppe nach vorn wandert und am Gruppenkopf verschwindet. Die Einzelwellen laufen also schneller als die ganze Gruppe, d. h. die Gruppengeschwindigkeit ist kleiner als die Phasengeschwindigkeit.

Die folgenden Aufnahmen demonstrieren dieses Verhalten der Wellengruppe am Beispiel eines natürlichen Wellenvorgangs, bei dem $v_{Gr} < v_{Ph}$ ist. Das gezeigte Kurvenbild überblendet in den Blick auf einen Wasserkanal. Eine Wellengruppe, die den Kanal durchläuft, wird von der Kamera begleitet. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Einzelwellen in der Gruppe von hinten nach vorn wandern; sie verschwinden am Gruppenkopf und werden laufend durch neue, am Gruppenschwanz entstehende, ersetzt³⁾. Nahaufnahmen des Gruppenkopfes und des Gruppenschwanzes, jeweils zuerst in der schematischen Trickdarstellung dann im Wasserkanal, lassen diese Vorgänge noch besser sichtbar werden.

Geht der sich mitbewegende Betrachter zu Phasengeschwindigkeit über, so kann er einen am Gruppenschwanz entstehenden Wellenberg begleiten und muß dabei die Wellengruppe überholen. Der Film demonstriert dies wiederum sowohl im Zeichentrick als auch am Wasserkanal. Hier wird besonders deutlich, wie ein Wellenberg am Gruppenschwanz entsteht, beim Durchlaufen der Gruppe wächst, wieder kleiner wird und verschwindet. Schließlich bleibt die Wellengruppe hinter der Bewegung des Betrachters zurück.

*Die Wellengruppe läßt sich darstellen
durch Überlagerung von unbegrenzten Wellenzügen*

Während im bisherigen Teil des Films lediglich die Erscheinung als solche gezeigt wurde, wird nun der Versuch unternommen, das Auftreten einer von der Phasengeschwindigkeit verschiedenen Gruppengeschwindigkeit und das daraus resultierende Verhalten der Wellengruppe durch graphische Trickdarstellung in anschaulicher Form zu erläutern.

¹⁾ Die *Kursiv*-Überschriften entsprechen den Zwischentiteln im Film.

²⁾ Dieses „Mitbewegen“ des Betrachters ist dadurch angedeutet, daß am unteren Bildrand ein Geschwindigkeitsvektor in Form eines hohlgezeichneten Pfeiles erscheint, der für die Dauer der Mitbewegung sichtbar bleibt; gleichzeitig bewegt sich der gemusterte Bilduntergrund in entgegengesetzter Richtung.

³⁾ Daß sich die Wellen brechen, ist durch die gegebenen Reibungsverhältnisse bedingt und ohne Einfluß auf die hier behandelten Erscheinungen.

Zunächst wird die Erzeugung einer Wellengruppe nach Art einer Fourier-Synthese demonstriert. Bekanntlich läßt sich eine Wellengruppe durch Überlagerung einer genügend großen Anzahl von unbegrenzten Wellenzügen geeigneter Wellenlänge und Amplitude darstellen. Der Film zeigt hier die Superposition folgender Wellenzüge:

$$\begin{array}{lll} y_1 = \cos 8x, & y_3 = 0,67 \cos 7x, & y_5 = 0,20 \cos 6x, \\ y_2 = \cos 9x, & y_4 = 0,67 \cos 10x, & y_6 = 0,20 \cos 11x. \end{array}$$

Dazu sei bemerkt, daß in diesem Fall, da nur 6 Wellenzüge verwendet werden, die Aufhebung zu Null rechts und links der Wellengruppe nicht bis ins Unendliche, sondern nur über einen größeren endlichen Bereich verwirklicht ist. Dann wiederholt sich die Figur der Wellengruppe.

Schon die Überlagerung von zwei Wellenzügen zeigt Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

Die weitere Betrachtung geschieht an der Überlagerungsfigur von nur zwei Wellenzügen gleicher Amplitude:

$$y = \sin 4x \quad \text{und} \quad y = \sin 5x.$$

Die Überlagerung besteht in diesem einfachsten und dadurch besonders übersichtlichen Fall aus einer Wellengruppe, die sich unmittelbar anschließend nach rechts und links wiederholt. Entsprechend der vorausgesetzten Dispersion ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden Wellenlängen verschieden groß, und zwar läuft die längere Welle schneller ($v_1 : v_2 \approx 8 : 7$).

Phasengeschwindigkeit

Zunächst wird die Bewegung einer Phase betrachtet. Das Bild beginnt mit der Ausgangsfigur — den beiden Wellenzügen mit Überlagerungsfigur —, die zunächst stillsteht. Eine gestrichelte Linie markiert eine Stelle, an der sich die Einzelwellen in gleicher Phase befinden. Dort hat die Überlagerungsfigur ihre maximale Amplitude. Die Figuren setzen sich für kurze Zeit (Zeiteinheit) in Bewegung; dabei zeichnet sich der Weg der markierten Wellenberge auf. Wie man sieht, ist die längere Einzelwelle gegenüber der Phase in der Wellengruppe etwas vorausgeeilt, die kürzere etwas zurückgeblieben. Die Phasengeschwindigkeit in der Wellengruppe stellt also einen Mittelwert der Geschwindigkeiten dar, mit denen die Einzelwellen fortschreiten.

Gruppengeschwindigkeit

Das Bild beginnt wiederum mit der in Ausgangslage stehenden Figur. Diesmal wird der Gruppenkopf betrachtet. An dieser Stelle befindet sich bei den Einzelwellen ein Wellenberg über einem Wellental. Die Figuren setzen sich wieder für die angenommene Zeiteinheit in Bewegung (der aufgezeichnete Weg entspricht also der Gruppengeschwindigkeit). Es

zeigt sich, daß auch in der dabei erreichten neuen Lage die Einzelwellen an der zum Gruppenkopf gehörenden Stelle wiederum gleich große, aber entgegengesetzte Amplitude haben. Nachdem sich die Figuren erneut in Bewegung gesetzt haben, ist schon jetzt bei genauer Beobachtung der beiden Einzelwellen — die Beobachtung wird durch „Mitbewegen“ des Betrachters erleichtert — zu erkennen, daß die beiden Phasen an der durch die gestrichelte Linie markierten Stelle immer entgegengesetzt gleich sind, sich also zu jeder Zeit gegenseitig aufheben. Es ist leicht einzusehen, daß die Überlagerungsfigur dort dauernd einen Nullpunkt haben muß.

In einer Nahaufnahme der Wellenzüge wird dieser Vorgang noch deutlicher. Zu diesem Zweck blenden die Achsen der Wellenzüge ein. An der gestrichelten Linie erscheinen die Amplituden der Wellen als jeweils wachsende und wieder zusammenschrumpfende Pfeile gleicher Länge, aber entgegengesetzter Richtung. Geht die Mitbewegung des Betrachters zu Phasengeschwindigkeit über — im Bild angedeutet durch den verlängerten Geschwindigkeitsvektor und die schnellere Bewegung des Bilduntergrundes —, so läuft die senkrechte Linie, die den Gruppenkopf markiert, nach links über das Bild, d. h. bleibt gegenüber der Fortbewegung des Betrachters zurück. Die obere, längere Welle läuft gleichzeitig langsam nach rechts bzw. eilt wenig voraus, während die untere kürzere Welle langsam zurückbleibt. Der Betrachter, der die Phase der Wellengruppe begleitet, bewegt sich also mit mittlerer Geschwindigkeit.

In einer nochmaligen fortlaufenden Darstellung wird die Möglichkeit gegeben, die erläuterten Einzelvorgänge im Zusammenhang zu verfolgen. Die Darstellung beginnt wieder mit der ruhenden Ausgangsfigur. Die Wellenzüge und ihre Überlagerungsfigur setzen sich in Bewegung und werden nach einiger Zeit mit Gruppengeschwindigkeit und schließlich mit Phasengeschwindigkeit begleitet, so daß die beobachtete Wellengruppe und ihre Beziehung zu den Wellenzügen im oberen Bildteil in allen Einzelheiten verfolgt werden kann. In einer anschließenden Wiederholung wird durch eine mitwandernde Pfeilspitze noch einmal darauf hingewiesen, daß die Phase innerhalb der Gruppe von hinten nach vorn läuft, also schneller als diese fortschreitet.

Je nach Verhalten der Einzelwellen sind drei Fälle möglich

Nach der eingehenden Behandlung des Falles „Gruppengeschwindigkeit kleiner als Phasengeschwindigkeit“ bildet eine vergleichende Zusammenstellung der drei insgesamt möglichen Fälle in der gleichen bisher verwendeten Darstellung den Schluß des Films. Je nach dem Geschwindigkeitsverhältnis der Einzelwellen, d. h. je nachdem, ob die Geschwindigkeit der längeren Wellen größer, gleich oder kleiner als die der kürzeren Wellen ist, gilt:

$$v_{\text{Gr}} \sqrt{\lambda} \leq v_{\text{Ph}}.$$

Die im Film angestellten Betrachtungen sind auf diese anderen Fälle ohne weiteres übertragbar.

Literatur

- [1] BECKER, R., Theorie der Elektrizität. 6. Aufl., B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1933 oder 7. Aufl., B. G. Teubner, Leipzig 1949.
- [2] LAMB, H., Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsche Ausg. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1907, oder (mit weniger gut passender Darstellung) in den betr. §§ der 2. Aufl. 1931.
- [3] MENZEL, H., Gerlands Beiträge zur Geophysik **54** (1939), S. 348.