

ISSN 0073-8433

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN

SEKTION
**TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN
NATURWISSENSCHAFTEN**

SERIE 7 · NUMMER 20 · 1981

FILM C 1285

Signalextraktion durch Mittelwertbildung



INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM · GÖTTINGEN

Angaben zum Film:

Tonfilm (Komm., deutsch oder engl.), 16 mm, schwarzweiß, 35 m, 3 1/2 min (24 B/s).
Hergestellt 1977, veröffentlicht 1978.

Der Film ist für die Verwendung im Hochschulunterricht bestimmt.

Veröffentlichung aus der Fakultät für Physik der Universität Freiburg, Prof. Dr. Ch. SCHLIER,
A. BENZ, und dem Institut für den Wissenschaftlichen Film, Göttingen, Dr. G. GLATZER;
Kamera: Ing. G. MATZDORF; Schnitt: L. RUPPEL.

Zitierform:

SCHLIER, Ch., A. BENZ und INST. WISS. FILM: Signalextraktion durch Mittelwertbildung. Film
C 1285 des IWF, Göttingen 1978. Publikation von Ch. SCHLIER, Publ. Wiss. Film., Sekt.
Techn. Wiss./Naturw., Ser. 7, Nr. 20/C 1285 (1981), 8 S.

Anschrift des Verfassers der Publikation:

Prof. Dr. Ch. SCHLIER, Albert-Ludwigs-Universität, Fakultät für Physik, Hermann-Herder-
Str. 3, D-7800 Freiburg i. Br.

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN

Sektion BIOLOGIE

Sektion PSYCHOLOGIE · PÄDAGOGIK

Sektion ETHNOLOGIE

Sektion TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Sektion MEDIZIN

NATURWISSENSCHAFTEN

Sektion GESCHICHTE · PUBLIZISTIK

Herausgeber: H.-K. GALLE · Schriftleitung: E. BETZ, I. SIMON

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN sind die schriftliche Ergänzung zu den
Filmen des Instituts für den Wissenschaftlichen Film und der Encyclopaedia Cinematographica. Sie ent-
halten jeweils eine Einführung in das im Film behandelte Thema und die Begleitumstände des Films sowie
eine genaue Beschreibung des Filminhalts. Film und Publikation zusammen stellen die wissenschaftliche
Veröffentlichung dar.

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN werden in deutscher, englischer oder
französischer Sprache herausgegeben. Sie erscheinen als Einzelhefte, die in den fachlichen Sektionen zu
Serien zusammengefaßt und im Abonnement bezogen werden können. Jede Serie besteht aus mehreren
Lieferungen.

Bestellungen und Anfragen an: Institut für den Wissenschaftlichen Film
Nonnenstieg 72 · D-3400 Göttingen
Tel. (0551) 202202

FILME FÜR FORSCHUNG UND HOCHSCHULUNTERRICHT

CHRISTOPH SCHLIER, ALOIS BENZ, Freiburg, und INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM, Göttingen:

Film C 1285

Signalextraktion durch Mittelwertbildung

Verfasser der Publikation: CHRISTOPH SCHLIER

Mit 2 Abbildungen

Inhalt des Films:

Signalextraktion durch Mittelwertbildung. Der Film zeigt an einem (simulierten) Beispiel, wie durch vielfaches Messen und Mittelwertbildung aus einem verrauschten Signal ein rauscharmes „herausgezogen“ werden kann.

Summary of the Film:

Signal Recovering by Signal Averaging. It is shown by example that a time dependent signal, which is buried in noise, may be recovered by multiple measurements and averaging.

Résumé du Film:

Extraction d'un signal par constitution de valeurs moyennes. Le film montre dans un exemple (simulé) comment un signal à bruit réduit peut être «extrait» d'un signal troublé par du bruit, à l'aide de mesures répétées et de la constitution de valeurs moyennes.

Allgemeine Vorbemerkungen

Aufgabe des Films ist die Demonstration eines vielbenutzten Verfahrens, das dazu dient, Signale, die bis zur Unkenntlichkeit im Rauschen „begraben“ sind, aus diesem herauszuholen: der Mittelwertbildung aus vielfach aufgenommenen Signalen. Diese Demonstration ist zwar auch realiter im Hörsaal möglich, jedoch dürften die dazu notwendigen teuren Geräte selten vorhanden sein. Andererseits ist das Verfahren so allgemein und wichtig, daß es in keiner Vorlesung, die moderne Meßverfahren behandelt, fehlen sollte.

Vorausgesetzt wird ein zeitabhängiges Signal $S(t)$, welches in synchronisierbarer Weise wiederholt werden kann, also zum Beispiel die Signalantwort auf einen Reiz oder eine definierte Parameteränderung des untersuchten Systems. (In der Tat wurde das Verfahren zuerst von Neurophysiologen an evozierten Hirnpotentialen er-

probt.) Das Signal sei durch additives ergodisches Rauschen $r(t)$ mit Mittelwert 0 und Streuung σ gestört, erscheint also als

$$S'(t) = S(t) + R(t)$$

Summiert man N Signalkopien $S'_i(t)$, $i = 1 \dots N$, und bildet den Mittelwert, so erhält man

$$S'_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S'_i(t) = S(t) + R_n(t).$$

Das gemittelte Signal ist zwar immer noch durch Rauschen überlagert, doch sagt die Theorie (s. Lit. [2]-[5]), daß die Streuung des N -fach gemittelten Rauschens (d. h. die quadratische Schwankung der Amplitude) nur noch den Wert σ/\sqrt{N} hat. Das auf die Amplitude bezogene Signal-zu-Rauschverhältnis S/N nimmt daher proportional zur Wurzel aus der Zahl der Wiederholungen ab. Dies entspricht übrigens der wohl-bekannteren Methode, bei der Messung physikalischer Größen – z. B. der Dicke eines Drahtes – N mal zu messen, wobei eine \sqrt{N} -fache Verkleinerung des sog. zufälligen Fehlers erwartet werden kann.

Zum praktisch brauchbaren Meßverfahren könnte die Mittelwertbildung (englisch: Signal Averaging) erst werden, nachdem die Computertechnik erlaubte, das Mitteln digital durchzuführen. Die Geräte hierzu heißen Mittelwertrechner, englisch: Signal Averager, doch wird auch häufig ein prozeßgekoppelter, normaler Computer benutzt. Das Signal $S(t)$ wird hierbei in gleichen Zeitintervallen abgetastet, digitalisiert, in digitaler Form gemittelt und dann z. B. auf einem Bildschirm in interpolierter oder diskreter Form dargestellt. Das Abtasttheorem von Shannon (z. B. SAKRISON [3], p. 59) zeigt, daß hierbei, falls die Abtastrate wenigstens zweifach so hoch ist wie die höchste Signalfrequenz, keine Information verlorengeht.

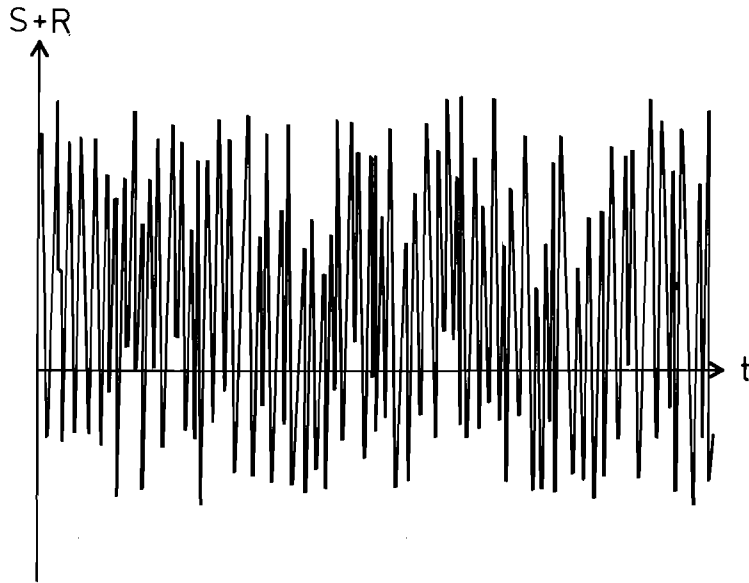
Der Film simuliert das Signal, wie es auf dem Bildschirm des Mittelwertrechners erscheinen würde (vgl. Abb. 1), und zeigt es dann nach $N = 3, 10, 55, 100, 250$ und 400 Mittelungen. Außerdem wird die Spektraldarstellung von Signal und Rauschen gezeigt (vgl. Abb. 2). Das Signal $S(t)$ ist hier aus 3 Sinuswellen zusammengesetzt

$$S(t) \sim \frac{1}{3} (\sin 2t + \sin 4t + \sin 6t)$$

Das Rauschen ist als weiß angenommen.

Zur Entstehung des Films

Der Film gehört zu einer Serie von Filmen (SCHLIER et al. [6]-[11]), die vollautomatisch computerunterstützt gezeichnet und abfotografiert wurden. Hierzu wurde eine Kamera mit der Möglichkeit der Einzelbildschaltung vor einen Speicherbildschirm gesetzt und ein Programm geschrieben, das Bild für Bild auf den Bildschirm zeichnet, die Kamera auslöst und schließlich den Bildschirm löscht (vgl. BENZ [1]). Die Benutzung eines Prozeßrechners (hier: DIETZ-MINCAL 621) erleichtert die dazu notwendigen Direktanschlüsse von Bildschirm und Kamera und die Realzeit-Programmierung. Auch das Zeichnen der Titel und die Buchführung über die Filmbilder geschehen computergesteuert.



SIGNAL + RAUSCHEN

Abb. 1. Verrauschtes Signal bei einmaligem Durchlauf (noch nicht diskretisiert)

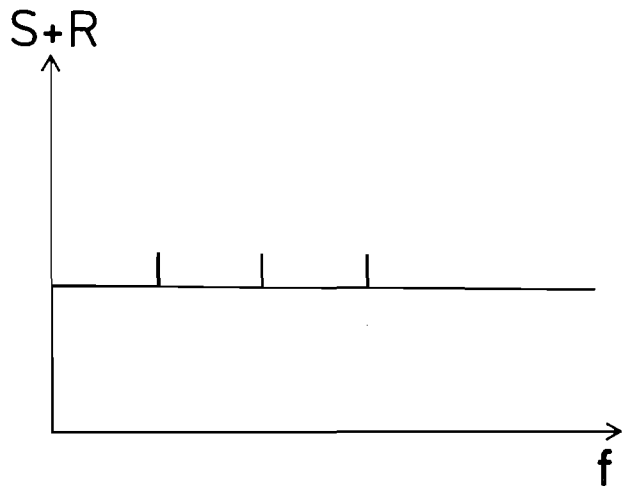


Abb. 2. Spektraldarstellung von Signal und Rauschen

Erläuterungen zum Film

Wortlaut des gesprochenen Kommentars¹

Der Film zeigt zunächst ein Signal aus der Überlagerung dreier Sinuswellen, dann einen Rauschprozeß.

In der Meßtechnik gibt es viele Arten von Signalen, z. B. die Spannung als Funktion der Zeit.

Die Aufzeichnung eines derartigen Signals ist in vielen Fällen durch Rauschen überlagert.

Häufig ist das Signal dann nicht mehr deutlich wiederzuerkennen.

Sodann zeigt der Film den abgetasteten Wert nach N -maliger Mittelung für $N = 3, 10, 55, 100, 250$ und 400 . Das Rauschen ist als Fehlerbalken des abgetasteten Signals dargestellt.

Verbesserung der Meßwerte durch N -maliges Messen

Es gibt eine Möglichkeit, verrauschte Signale wiederzugewinnen, wenn die Signale auf einen bestimmten Zeitpunkt bezogen und wiederholt werden können.

Man bildet dann den Mittelwert aus den mehrfach wiederholten Signalen.

Dabei bleibt das Signal erhalten, aber der Rauschanteil nimmt ständig weiter ab.

Noch deutlicher für $N = 100$.

Wartet man hinreichend lange, d. h., wird das Signal genügend oft wiederholt, so läßt es sich mit jeder gewünschten Genauigkeit wiedergewinnen.

Schließlich wird das ursprüngliche, verrauschte Signal $S(t)$ dem bei $N = 400$ „wiedergewonnenen“ $S_{400}(t)$ noch einmal gegenübergestellt.

Hier wird es als Verbindung der einzelnen gemessenen Punkte sichtbar.

Technische Geräte, die dieses Verfahren benutzen, heißen Mittelwertrechner oder signal averager.

Als nächstes folgt eine Darstellung des soeben im Zeitbereich gezeigten Verhaltens im Spektralbereich. Spektraldarstellung und Zeitdarstellung sind Fouriertransformierte voneinander (vgl. z. B. SAKRISON [3]).

Darstellung im Spektralbereich

Unser Signal bestand aus drei Sinuswellen.

Die Rauschamplitude als Funktion der Frequenz ist im allgemeinen näherungsweise konstant.

Hier hat das Signal höchstens die Amplitude 13.

Das Signal hat anfangs die Amplitude 13 (in willkürlichen Einheiten), das Rauschen die Amplitude (Streuung) 20.

Nach mehrfacher Mittelwertbildung wird die Rauschamplitude immer kleiner.

Schließlich ist ein Signal-Rauschverhältnis von 13 : 1 erreicht,

denn die Rauschamplitude ist auf $\sqrt{400} = 1$ abgesunken, während die Signalamplitude erhalten blieb. Als Schlußbild wird das Gesamtergebnis als Grafik gezeigt:

S/R als Funktion von N

Tragen wir das Signal-Rauschverhältnis auf als Funktion der Zahl der Wiederholungen, dann erhalten wir eine Wurzelfunktion.

¹ Die *Kursiv*-Überschriften entsprechen den Zwischentiteln im Film. – Die eingerückten Abschnitte in Kleindruck geben zusätzliche Informationen.

Nach der Theorie erhöht sich der Wert des Signal-Rauschverhältnisses proportional zur Wurzel aus der Zahl der Wiederholungen.

Ergebnis: N-maliges Messen verbessert S/R um den Faktor \sqrt{N} .

English Version of the Spoken Commentary¹

Modern measurement techniques cover many kinds of signals, for instance a voltage as the function of time.

Often the record of the signal contains superimposed noise.

Sometimes the signal is no longer discernible in the waveform.

Retrieval of signals by repetitive detection

Signals can be retrieved from noise if they can be repeated relative to a known trigger signal.

Electronic equipment utilizing this procedure is known under the name of signal averager.

One forms the average of many repeated wave forms.

This keeps the signal part constant, while the noise part is reduced.

More obvious for $n = 100$.

After a sufficient number of repetitions the signal can be retrieved with any prescribed accuracy.

Here, it becomes visible as the line connecting the set of measured points.

Plot in the frequency domain

The theory of the averaging effect is best discussed in the frequency domain.

Our signal consisted of three sine waves.

As a function of frequency the noise amplitude is in general approximately a constant.

Here, the signal amplitude is no more than 13.

The averaging process reduces the noise amplitude.

Eventually a signal to noise ratio of 13 has been reached.

S/R as a function of N

Plotting the signal to noise ratio as a function of the number N of repetitions results in a root function.

Result: By N times repetition the signal to noise ratio increases proportional to the square root of N.

Literatur

Vorbemerkung: Signalextraktion durch Mittelwertbildung wird zwar oft benutzt, aber in der Literatur selten systematisch behandelt. Kurze Hinweise finden sich in [2], [5], mehr Material häufig in Firmenschriften, z. B. [4].

[1] BENZ, A.: Rechnerunterstützte Herstellung von Lehrfilmen. Zulassungsarbeit für das Staatsexamen, Freiburg 1971.

¹ The headlines in *italics* correspond with the subtitles in the film.

- [2] DIEFENDERFER, A. J.: Principles of Electronic Instrumentation. Philadelphia 1972, p. 474.
- [3] SAKRISON, D. J.: Communication Theory: Transmission of Waveforms and Digital Information. New York 1968.
- [4] TRIMBLE, C. R.: What is Signal Averaging. Hewlett-Packard Journal 19, April 1968, 2–7.
- [5] TURGEL, R. S.: Voltage, Current and Charge Measurements. In: Electronic Methods, Part B, Editors E. BLEULER and R. O. HAXBY, New York 1975.

Filmveröffentlichungen

- [6] SCHLIER, Ch., A. BENZ und INST. WISS. FILM: Keplersche Gesetze der Planetenbewegung. Film C 1286 des IWF, Göttingen 1978. Publikation von Ch. SCHLIER, Publ. Wiss. Film., Sekt. Techn. Wiss./Naturw., Ser. 7, Nr. 6/C 1286 (1980), 9 S.
- [7] SCHLIER, Ch., G. LODE und INST. WISS. FILM: Diffusion in Gasen. Film C 1325 des IWF, Göttingen 1978. Publikation von Ch. SCHLIER, Publ. Wiss. Film., Sekt. Techn. Wiss./Naturw., Ser. 7, Nr. 23/C 1325 (1981), 11 S.
- [8] SCHLIER, Ch., A. SANDLER und INST. WISS. FILM: Entstehung und Klassifikation von Wellen. Film C 1287 des IWF, Göttingen 1978. Publikation von Ch. SCHLIER, Publ. Wiss. Film., Sekt. Techn. Wiss./Naturw., Ser. 7, Nr. 21/C 1287 (1981), 8 S.
- [9] SCHLIER, Ch., A. SANDLER und INST. WISS. FILM: Klassische Atom-Atom-Streuung. Film C 1291 des IWF, Göttingen 1978. Publikation von Ch. SCHLIER, Publ. Wiss. Film., Sekt. Techn. Wiss./Naturw., Ser. 7, Nr. 22/C 1291 (1981), 11 S.
- [10] SCHLIER, Ch., W. SIEVERS und INST. WISS. FILM: Stöße von Protonen auf schweren Wasserstoff. Film C 1330 des IWF, Göttingen 1979. Publikation von Ch. SCHLIER, Publ. Wiss. Film., Sekt. Techn. Wiss./Naturw., Ser. 7, Nr. 7/C 1330 (1980), 11 S.
- [11] SCHLIER, Ch., U. WEISHAAR und INST. WISS. FILM: Orbiting-Stöße von Atomen. Film C 1329 des IWF, Göttingen 1979. Publikation von Ch. SCHLIER, Publ. Wiss. Film., Sekt. Techn. Wiss./Naturw., Ser. 7, Nr. 24/C 1329 (1981), 9 S.

Abbildungsnachweis

Abb. 1 und 2: Einzelbilder aus dem Film.