

ISSN 0073-8433

# **PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN**

SEKTION  
**TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN  
NATURWISSENSCHAFTEN**

SERIE 7 · NUMMER 1 · 1980

FILM C 1324

**Schwingungen einer rechteckigen Membran**



INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM · GÖTTINGEN

*Angaben zum Film:*

Tonfilm (Komm., deutsch od. engl.), 16 mm, schwarzweiß, 135 m, 12 1/2 min (24 B/s). Hergestellt 1978, veröffentlicht 1979.

Der Film ist für die Verwendung im Hochschulunterricht bestimmt.

Veröffentlichung aus dem Mathematischen Institut II der Universität Karlsruhe, Dipl.-Math. E. HALTER, und dem Institut für den Wissenschaftlichen Film, Göttingen, Dr. G. GLATZER; Schnitt: L. RUPPELL.

*Zitierform:*

HALTER, E., und INST. WISS. FILM: Schwingungen einer rechteckigen Membran. Film C 1324 des IWF, Göttingen 1979. Publikation von E. HALTER, Publ. Wiss. Film., Sekt. Techn. Wiss./Naturwiss., Ser. 7, Nr. 1/C 1324 (1980), 8 S.

*Anschrift des Verfassers der Publikation:*

Dr. E. HALTER, Mathematisches Institut II der Universität Karlsruhe, Engler Straße Nr. 2, D-7500 Karlsruhe.

---

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN

Sektion BIOLOGIE

Sektion PSYCHOLOGIE · PÄDAGOGIK

Sektion ETHNOLOGIE

Sektion TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Sektion MEDIZIN

NATURWISSENSCHAFTEN

Sektion GESCHICHTE · PUBLIZISTIK

Herausgeber: H.-K. GALLE · Schriftleitung: E. BETZ, I. SIMON

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN sind die schriftliche Ergänzung zu den Filmen des Instituts für den Wissenschaftlichen Film und der Encyclopaedia Cinematographica. Sie enthalten jeweils eine Einführung in das im Film behandelte Thema und die Begleitumstände des Films sowie eine genaue Beschreibung des Filminhalts. Film und Publikation zusammen stellen die wissenschaftliche Veröffentlichung dar.

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN werden in deutscher, englischer oder französischer Sprache herausgegeben. Sie erscheinen als Einzelhefte, die in den fachlichen Sektionen zu Serien zusammengefaßt und im Abonnement bezogen werden können. Jede Serie besteht aus mehreren Lieferungen.

Bestellungen und Anfragen an: Institut für den Wissenschaftlichen Film  
Nonnenstieg 72 · D-3400 Göttingen  
Tel. (0551) 21034

## FILME FÜR FORSCHUNG UND HOCHSCHULUNTERRICHT

EBERHARD HALTER, Karlsruhe, und INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM,  
Göttingen:

Film C 1324

### Schwingungen einer rechteckigen Membran

Verfasser der Publikation: EBERHARD HALTER

Mit 5 Abbildungen

#### *Inhalt des Films:*

**Schwingungen einer rechteckigen Membran.** In perspektivischer Darstellung zeigt der Film freie Schwingungen einer ungedämpften, rechteckigen Membran. Dem Konzept der Separation der Variablen folgend wird zunächst eine zweiparametrische Lösungsschar angegeben, mit der durch Überlagerung die Lösung einiger Anfangs-Randwertprobleme dargestellt wird.

#### *Summary of the Film:*

**Vibrations of a Rectangular Membrane.** The film shows free vibrations of an undamped, rectangular membrane in a perspective representation. Following the concept of separation of variables a two parameter set of solutions is introduced by which the solution of some initial-boundary value problems can be represented as superposition.

#### *Résumé du Film:*

**Vibrations d'une membrane rectangulaire.** Le film montre, en perspective, les vibrations d'une membrane rectangulaire non-amortie. Après l'exposition du principe de la séparation des variables, une série de solutions à deux paramètres est indiquée; elles permettent de résoudre, par superposition, quelques problèmes aux valeurs initiales et aux limites.

### Allgemeine Vorbemerkungen

Der Film nimmt Bezug auf den Produktansatz als Lösungsmethode für partielle Differentialgleichungen. Am Beispiel der rechteckigen Membran wird die Problemstellung beschrieben, die zweiparametrische Lösungsschar und das Superpositionsprinzip vorgestellt. Die Lösung einiger Anfangs-Randwertprobleme lassen das Phänomen der stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten erkennen. Der Film soll eine Anwendung mathematischer Methoden für partielle Differentialgleichungen illustrieren.

### Zur Entstehung des Films

Die Gestalt der Membran wird als ein Netz von Linien dargestellt, perspektivisch projiziert und von einem computergesteuerten Automaten (Plotter) gezeichnet. Unsichtbare Membranteile werden dabei unterdrückt, unterschiedliche Helligkeit naher und ferner Linien verstärken die Plastizität der Darstellung. Durch viele verschiedene aufeinanderfolgende Bilder im Film entsteht ein guter Eindruck der stetigen Zeitabhängigkeit der Membranschwingungen.

### Erläuterungen zum Film

#### Wortlaut des gesprochenen Kommentars<sup>1</sup>

##### *Das Randwertproblem*

Die freien Schwingungen einer Membran werden durch die homogene Wellengleichung beschrieben. An ihrem Rand soll die Membran eingespannt sein, d. h. es tritt die Randbedingung  $u=0$  hinzu. Im Fall einer rechteckigen Membran gewinnt man mit einem Produktansatz eine Schar von Lösungen dieses Randwertproblems.

##### *Eine Lösungsschar*

Jede der so gewonnenen Lösungen trägt zwei Zahlen  $m$  und  $n$  als Index. Als Grundschwingung wird die Lösung mit den Indices  $m=1$  und  $n=1$ , also  $u_{11}$  bezeichnet. Weitere Beispiele:  $u_{21}$ ,  $u_{12}$ ,  $u_{22}$ ,  $u_{31}$  und schließlich  $u_{13}$ . Anschaulich bedeutet  $m$  bzw.  $n$  die Anzahl der Berge und Täler, welche beim Durchqueren der Membran parallel der einen bzw. anderen Kantenrichtung auftreten. Es folgen  $u_{32}$ ,  $u_{33}$ . Größere Werte für  $m$  und  $n$  liefern offenbar höhere Frequenzen. Hier ist  $m=4$ ,  $n=5$ . Zum Vergleich noch einmal die Grundschwingung (vgl. Abb. 1 a + b).

##### *Das Superpositionsprinzip*

Konstante Vielfache und Summen von Lösungen sind ihrerseits wieder Lösungen des geschilderten Randwertproblems. Am vorliegenden Beispiel sind außer der Grundschwingung  $u_{11}$  noch  $u_{12}$  und  $u_{21}$  beteiligt (vgl. Abb. 2). Zusätzlich zur Wellengleichung und der Randbedingung fordert man beim Anfangs-Randwertproblem, daß die Funktion  $u$  sowie die Zeitableitung  $u_t$  im Zeitpunkt 0 vorgegebene Werte auf dem Rechteck annehmen. Durch die Hinzunahme dieser sogenannten Anfangsbedingungen wird eine Lösung eindeutig bestimmt.

##### *Das Anfangsrandwertproblem*

1. Beispiel (s. Abb. 3): Die Anfangsgestalt entspricht einer Pyramide. Die Anfangsgeschwindigkeit ist überall 0. Die Lösung ist periodisch. Obwohl sie Kanten aufweist, kann sie als Grenzelement von Überlagerungen der Elemente der Lösungsschar dargestellt werden.

<sup>1</sup> Die *Kursiv*-Überschriften entsprechen den Zwischentiteln im Film.

2. Beispiel: Die Anfangsgestalt entspricht einem Walmdach. Die Anfangsgeschwindigkeit ist wieder überall 0. Man kann hier gegenüber dem ersten Beispiel keine große Veränderung der Lösung erkennen. Es zeigt sich die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten.

3. Beispiel: Die Anfangswerte sind die gleichen wie im vorangegangenen Beispiel, lediglich die Firstlänge des Walmdaches wird vergrößert. Die zugehörige Lösung weicht nun deutlich erkennbar ab von der Pyramidenlösung.

4. Beispiel: (s. Abb. 4): Noch einmal wird die Firstlänge des Walmdaches vergrößert. Eine Ähnlichkeit mit der Pyramidenlösung ist jetzt nicht mehr zu erkennen.

5. Beispiel (s. Abb. 5): Am Anfang befindet sich die Membran in der Ruhelage; jedoch ist die Anfangsgeschwindigkeit in einer Umgebung der Membranmitte negativ. Die Lösung läßt im hier gezeigten zeitlichen Ausschnitt keine Periodizität erkennen. Das Superpositionsprinzip zeigt sich hier besonders anschaulich in der Überlagerung vieler kleiner Wellen. Diese Beispiele sind nur eine kleine Auswahl aus der großen Mannigfaltigkeit freier Schwingungen einer rechteckigen Membran.

### English Version of the Spoken Commentary<sup>1</sup>

#### *Das Randwertproblem*

(The Boundary Value Problem)

The free vibrations of a membrane are described by the homogenous wave equation. The membrane is attached along its boundary to a fixed plane curve, that is we have the boundary condition  $u=0$ . In the case of a rectangular membrane, one obtains a set of solutions of this boundary value problem by the method of separation of variables.

#### *Eine Lösungsschar*

(A Set of Solutions)

Each solution is characterized by two indexing numbers  $m$  and  $n$ . The solution with the indices  $m=1$  and  $n=1$ , namely  $u_{11}$ , has the lowest frequency. Further examples:  $u_{21}$ ,  $u_{12}$ ,  $u_{22}$ ,  $u_{31}$  and finally  $u_{13}$ . Graphically the parameters  $m$  and  $n$  signify the number of hills and valleys, which are encountered while crossing the membrane along a parallel to one of the boundary lines. Here you see  $u_{32}$ ,  $u_{33}$ . Solutions with larger  $m$  and  $n$  obviously vibrate at higher frequencies. Here is the case  $m=4$ ,  $n=5$ . For comparison,  $u_{11}$  again (see fig. 1 a + b).

#### *Das Superpositionsprinzip*

(The Superposition Principle)

Constant multiples and sums of solutions are additional solutions of the boundary value problem. The present example involves  $u_{11}$ ,  $u_{12}$  und  $u_{21}$ . In the initial-boundary value problem in addition to the conditions already stated, the solution  $u$

<sup>1</sup> The headlines in *italics* correspond with the subtitles in the film.

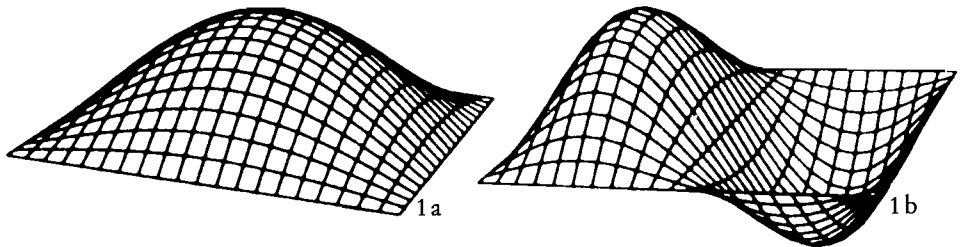


Abb. 1. Lösungsschar; a: Grundschiwingung  $u_{11}$ ; b: Oberschiwingung  $u_{21}$

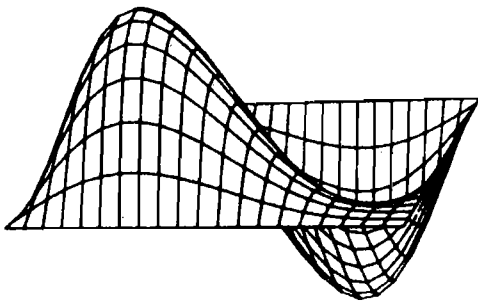


Abb. 2. Superpositionsprinzip; Überlagerung von  $u_{11}$ ,  $u_{12}$  und  $u_{21}$

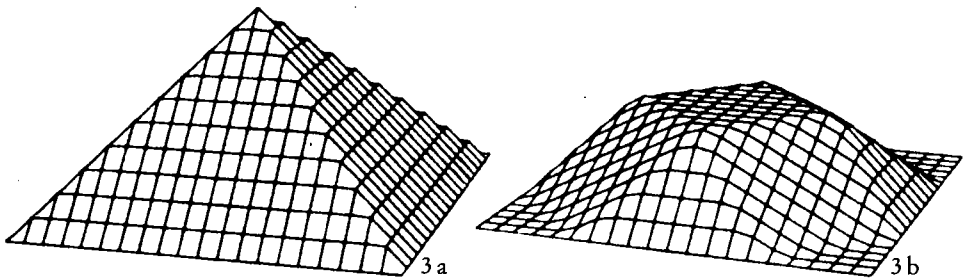


Abb. 3. Anfangsrandwertproblem; 1. Beispiel: Pyramide. a:  $T=0,0$ ; b:  $T=1,9$

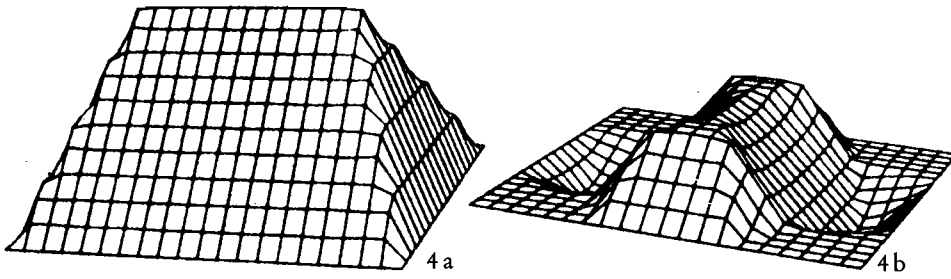


Abb. 4. Anfangsrandwertproblem; 4. Beispiel: Walmdach. a:  $T=0,0$ ; b:  $T=3,0$

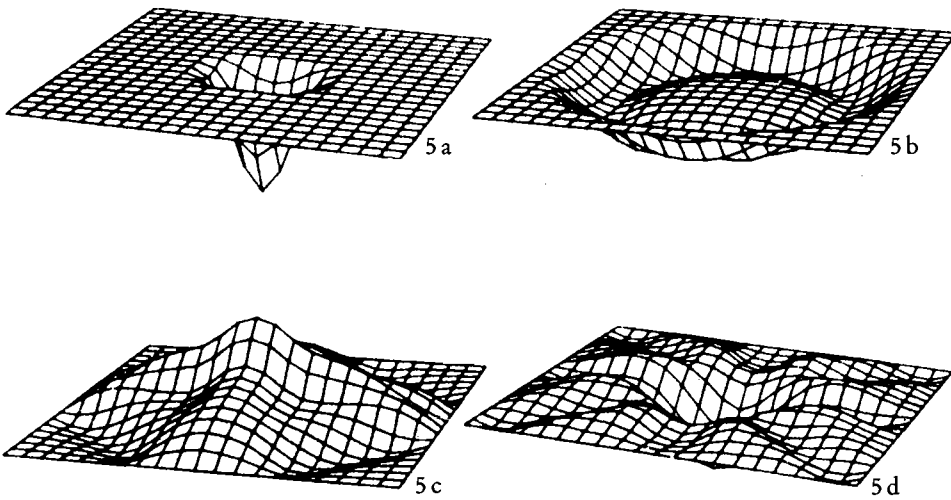


Abb. 5. Anfangsrandwertproblem; 5. Beispiel: Impuls. a:  $T=0,6$ ; b:  $T=3,7$ ; c:  $T=10,3$ ; d:  $T=20,7$

and its time derivative  $u_t$  must assume prescribed values in the rectangle at  $t=0$ . With these initial conditions the solution is uniquely determined (see fig. 2).

### *Das Anfangsrandwertproblem*

(The Initial-Boundary Value Problem)

First example (see fig. 3): The initial form is that of a pyramid. The initial velocity is zero throughout. The solution is periodic. Despite the presence of sharp edges the solution can be obtained as the limit of a linear superposition of the functions  $u_{mn}$ .

Second example: The initial form is that of a hiproof. Again the initial velocity is zero everywhere. Here the solution is very similar to the solution of the first example. This demonstrates the continuous dependence of solutions on initial values.

Third example: In comparison to the second example we lengthen the ridge of the roof. Now the solution is easily distinguished from the solution of the first example, where the initial form was a pyramid.

Fourth example (see fig. 4): We lengthen the ridge once again. There is no longer any similarity to the pyramid solution.

Fifth example (see fig. 5): Initially the membrane is at equilibrium but it has negative velocity near its center. There is no observable periodicity. Here one sees clearly how the solution is built up through the superposition of many small waves. These examples are only a small selection from the numerous interesting phenomena involving free vibrations of a rectangular membrane.

### **Literatur**

- [1] FLUGGE, S.: Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 1. Berlin – Göttingen – Heidelberg 1961.
- [2] FRANK, P., und R. MISES: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Band II, Nachdruck der 2. Auflage. New York – Braunschweig 1961.
- [3] SNEDDON, I. N.: Fourier Transforms. New York – Toronto – London 1951.

### **Abbildungsnachweis**

Abb. 1–5: Einzelaufnahmen aus dem Film.