

ISSN 0073-8433

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN

SEKTION
**TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN
NATURWISSENSCHAFTEN**

SERIE 7 · NUMMER 36 · 1982

FILM C 1433

Borsukscher Antipodensatz



INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM · GÖTTINGEN

Angaben zum Film:

Tonfilm (Komm., deutsch), 16 mm, farbig, 275 m, 25 1/2 min (24 B/s). Hergestellt 1981, veröffentlicht 1982.

Der Film ist für die Verwendung im Hochschulunterricht bestimmt. Veröffentlichung der Interdisziplinären Arbeitsgruppe Mathematisierung, Gesamthochschule Kassel, W. DRÖGE, Dr. W. METZLER, Prof. Dr. F. WILLE; Grafik: H. BROEKER, K. FULLER, H. GÖTTLICH, Ch. MARAUN, M. ZIEMKE, und dem Institut für den Wissenschaftlichen Film, Göttingen, B. LIER; Kamera: H. G. GRASKE, G. MATZDORF, W. DRÖGE, Dr. W. METZLER; Ton: K. KEMNER; Schnitt: E. FISCHER.

Zitierform:

DRÖGE, W., W. METZLER, F. WILLE und INST. WISS. FILM: Borsukscher Antipodensatz. Film C 1433 des IWF, Göttingen 1982. Publikation von W. DRÖGE, W. METZLER, F. WILLE, Publ. Wiss. Film., Sekt. Techn. Wiss./Naturw., Ser. 7, Nr. 36/C 1433 (1982), 23 S.

Anschrift der Verfasser der Publikation:

W. DRÖGE, Dr. W. METZLER, F. WILLE, Interdisziplinäre Arbeitsgruppe Mathematisierung, Gesamthochschule Kassel, D-3500 Kassel.

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN

Sektion BIOLOGIE

Sektion PSYCHOLOGIE · PÄDAGOGIK

Sektion ETHNOLOGIE

Sektion TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN

Sektion MEDIZIN

NATURWISSENSCHAFTEN

Sektion GESCHICHTE · PUBLIZISTIK

Herausgeber: H.-K. GALLE · Schriftleitung: E. BETZ, I. SIMON

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN sind die schriftliche Ergänzung zu den Filmen des Instituts für den Wissenschaftlichen Film und der Encyclopaedia Cinematographica. Sie enthalten jeweils eine Einführung in das im Film behandelte Thema und die Begleitumstände des Films sowie eine genaue Beschreibung des Filminhalts. Film und Publikation zusammen stellen die wissenschaftliche Veröffentlichung dar.

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN werden in deutscher, englischer oder französischer Sprache herausgegeben. Sie erscheinen als Einzelhefte, die in den fachlichen Sektionen zu Serien zusammengefaßt und im Abonnement bezogen werden können. Jede Serie besteht aus mehreren Lieferungen.

Bestellungen und Anfragen an: Institut für den Wissenschaftlichen Film
Nonnenstieg 72 · D-3400 Göttingen
Tel. (05 51) 2022 02

FILME FÜR FORSCHUNG UND HOCHSCHULUNTERRICHT

WALTER DRÖGE, WOLFGANG METZLER, FRIEDRICH WILLE, Kassel, und
INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM, Göttingen:

Film C 1433

Borsukscher Antipodensatz

Verfasser der Publikation: WALTER DRÖGE, WOLFGANG METZLER, FRIEDRICH WILLE

Mit 15 Abbildungen

Inhalt des Films:

BORSUKSCHER ANTIPODENSATZ. Der Film veranschaulicht den BORSUKSCHEN Antipodensatz, der Aussagen über die Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungssysteme macht. Zuerst wird der Satz im ein- und zweidimensionalen Fall erläutert. Dann, im Hauptteil, folgt ein elementarer geometrischer Beweis des Satzes. Er verdeutlicht sowohl den Aspekt der Gleichungslösung wie auch den topologischen Gehalt des Satzes.

Summary of the Film:

BORSUK'S ANTIPODAL THEOREM. The movie shows BORSUK'S Antipodal Theorem. This theorem provides the existence of solutions of systems of nonlinear equations. First the theorem is stated for one and two dimensions. Then, in the main part, an elementary geometrical proof of the theorem is given, which shows the aspect of solving of equations as well as the topological aspect.

Résumé du Film:

THÉORÈME SUR LES ANTIPODES DE BORSUK. Le film expose le théorème sur les antipodes de BORSUK, relatif à la résolution de systèmes d'équations non linéaires. Le théorème est tout d'abord expliqué dans un cas à une et deux dimensions. Puis la partie principale montre une preuve géométrique élémentaire du théorème. Le film présente à la fois l'aspect de la résolution d'équations et le contenu topologique du théorème.

Allgemeine Vorbemerkungen

Im Jahre 1933 veröffentlichte K. BORSUK den nach ihm benannten Antipodensatz ([1], Satz I). Er wird heute als einer der zentralen Sätze der klassischen (kombinatorischen) Topologie sowie der nichtlinearen Analysis angesehen. Sein Wert für die Anwendungen liegt darin, daß er Aussagen über die Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungssysteme

$$f(x) = 0$$

$$(f: M \rightarrow \mathbb{R}^n, M \subset \mathbb{R}^n)$$

liefert. Verallgemeinerungen des BORSUKSchen Satzes auf Funktionsräume (wie z. B. BANACH-Räume), gestatten es, Aussagen über die Lösungsexistenz bei Differential- und Integralgleichungen zu machen (DEIMLING [2], KRASNOSELSKII [5]). Eine Reihe bekannter Fixpunktsätze, wie der BROUWERSche und der SCHAUDERSche Fixpunktsatz, können als Spezialfälle des BORSUKSchen Satzes und seiner Verallgemeinerungen angesehen werden.

Im folgenden formulieren wir den BORSUKSchen Antipodensatz in anwendungsbezogener Fassung, in der die Lösbarkeit von $f(x) = 0$ in den Vordergrund gerückt wird, (s. WILLE [6], S. 92, Satz 3.17; DEIMLING [2]; KRASNOSELSKII [5]). Dazu benutzen wir folgende Bezeichnungen.

R^n ist der n -dimensionale reelle Vektorraum, der aus allen n -Tupeln $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit reellen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n besteht.

Eine Teilmenge M des R^n wird „symmetrisch“ genannt, wenn $M = -M$ gilt, d. h. wenn mit $x \in M$ stets auch $-x \in M$ erfüllt ist. Im folgenden werden kompakte, konvexe, symmetrische Mengen mit inneren Punkten betrachtet. Beispiele für solche Mengen im R^3 sind Kugeln, Würfel, Quader, Oktaeder oder Ellipsoide, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung O in R^3 ist.

Satz A (BORSUKScher Antipodensatz im R^n): Es sei $f: M \rightarrow R^n$ eine stetige Abbildung, definiert auf einer kompakten, konvexen, symmetrischen Menge $M \subset R^n$, deren Inneres nicht leer ist. Gilt

$$f(-x) = -f(x) \text{ für alle Randpunkte } x \text{ von } M, \quad (1)$$

so folgt: f besitzt mindestens eine Nullstelle x_0 :

$$f(x_0) = 0.$$

Zusatz: Gilt zusätzlich $f(x) \neq 0$ für alle Randpunkte x von M , so folgt, daß der Abbildungsgrad von f bzgl. M und 0 ungerade ist, in Formeln

$$d(f, M, 0) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Bemerkungen: a) Auf den Zusatz wird nur im Anhang dieser Schrift kurz eingegangen. Im übrigen wird die Theorie des Abbildungsgrades (DEIMLING [2]) nicht benutzt, weder im Film noch in diesem Text. Die beschriebene Beweisführung ist elementar und geometrisch anschaulich. Der Film ist damit für Studenten, die Grundkenntnisse in Analysis und Linearer Algebra besitzen, verständlich.

b) Die Voraussetzung (1) in Satz A wird „Antipodenbedingung“ genannt. Sie darf auch durch die allgemeinere Bedingung ersetzt werden, daß „ $f(x)$ und $f(-x)$ für jeden Randpunkt x von M verschiedene Richtungen haben“, in Formeln ausgedrückt:

$$\left. \begin{array}{l} f(-x) \neq t f(x) \text{ für alle } t \geq 0 \text{ und alle} \\ \text{Randpunkte } x \text{ von } M. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Diese Bedingung ist bei praktisch vorliegenden Gleichungssystemen bedeutend häufiger anzutreffen und daher für Anwendungen wichtiger als die ursprüngliche Antipodenbedingung (1). Für die Beweisführung des Satzes A ist allerdings die Antipodenbedingung (1) sehr viel günstiger. Hat man Satz A in der beschriebenen Fassung bewiesen, so ist der Nachweis dafür, daß (1) durch (2) ersetzt werden darf, äußerst elementar. (Gilt nämlich (2) statt (1) in Satz A, so hat man f nur nullstellenfrei auf

$2M = \{2x \mid x \in M\}$ stetig zu erweitern, und zwar so, daß die Antipodenbedingung auf dem Rande von $2M$ gilt. Das ist ohne Schwierigkeiten möglich. Damit hat f nach Satz A eine Nullstelle, die nur in M liegen kann, womit die Ersetzbarkeit von (1) durch (2) gezeigt ist.) Die vollständige Durchführung dieses Beweises ist in WILLE [6], S. 101–103, Abschn. 3.3.5 beschrieben.

c) Hat man Satz A für eine spezielle kompakte, konvexe, symmetrische Menge M mit inneren Punkten bewiesen, so erkennt man sofort, daß er für jede dieser Mengen gilt. Denn durch radiales Stauchen oder Strecken kann man je zwei solche Mengen homöomorph ineinander überführen. Die damit verbundene Deformation von f läßt Nullstellenexistenz und Antipodenbedingung unverändert. Dies erlaubt es uns, den Beweis mit einer Menge M zu führen, die für die gewählte Beweistechnik besonders zweckmäßig ist.

Im Film, der den ebenen Fall \mathbb{R}^2 behandelt, wird daher ein Quadrat als Definitionsbereich von f zugrundegelegt. Im \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) erweisen sich sogenannte „Hyperoktaeder“ als besonders günstig (s. Anhang). Ein Verlust an Allgemeinheit tritt bei Beschränkung auf diese Definitionsbereiche nicht ein.

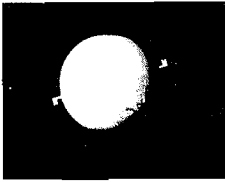
d) Der Beweis, wie er im Film gezeigt wird, geht auf einen Grundgedanken von P. MANI ([4]) zurück. Der von ihm angegebene Beweis, der auch in WILLE [6], S. 94, beschrieben ist, wurde zum Ausgangspunkt genommen und in den hier vorliegenden neuen Beweis des BORSUKSchen Satzes verwandelt. Die elementar anschauliche Seite dieses Beweises zu vermitteln, ist das Hauptanliegen des Films.

Zur Entstehung des Films

Der Film wurde als Zeichentrickfilm gedreht, zuzüglich eines kurzen Realfilmteiles, der den Begriff „Antipodenpunkte“ auf der Erdkugel zeigt. Die Zeichentrickvorlagen wurden auf farbigem Zeichenkarton in DIN-A-3-Format gezeichnet, wie auch auf Klarsicht-Folien. Diese wurden zur Bildveränderung auf den Zeichenkarton gelegt, öfters in mehreren Lagen übereinander. Die Zeichnungen wurden teils von Hand, teils computerunterstützt hergestellt. Die Dreharbeiten wurden auf der 16-mm-Trickfilmanlage des Instituts für den Wissenschaftlichen Film (IWF) in Göttingen durchgeführt. Die Herstellungszeit des Films von der Drehbuchherstellung bis zur fertig vertonten Schnittkopie dauerte von Februar 1980 bis Juni 1980, also 5 Monate.

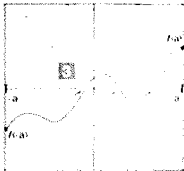
Dem Film ging eine Vorfassung in Super-8-Technik voraus, die von W. DRÖGE und G. KLEIN im Rahmen einer Examensarbeit an der Gesamthochschule Kassel, Universität des Landes Hessen, hergestellt worden ist. Sie wurde angeregt und betreut von Prof. Dr. F. WILLE.

Hiervon ausgehend wurde das Drehbuch des vorliegenden 16-mm-Films konzipiert. Das vollständige Drehbuch verfaßte Dr. W. METZLER, Leiter der Arbeitsgruppe „Visualisierung“ in der „Interdisziplinären Arbeitsgruppe Mathematisierung“ (IAGM) der Gesamthochschule Kassel. Regie und Produktionsleitung lagen ebenfalls in den Händen von W. METZLER. Die Zeichnungen für den Film stellten B. BROEKER, H. GÖTLICH, C. MARAUN und M. ZIEMKE innerhalb von zwei Monaten her. Die Programme für computerunterstützte Zeichnungen, wie sie an einigen Stellen des Films benötigt wurden, schrieb K. FULLER. Die abgebildeten Filmausschnitte

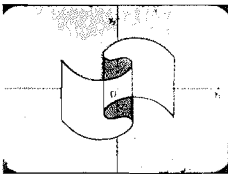


Filmausschnitte.

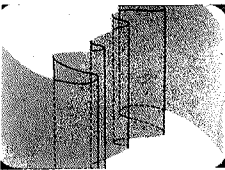
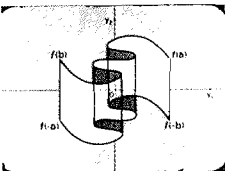
a: Drehende Erdkugel



b: zum Zwischenwertsatz



c bis e: Wertebereiche
verschiedener zwei-
dimensionaler stetiger
Abbildungen



c und d zeigen solche computererzeugte Figuren, die im Film stetig verformt werden und daher von Hand nicht präzise und schnell genug hergestellt werden können. Die Filmausschnitte b und e dagegen wurden von Hand gezeichnet, da ihre Verformungen weniger Zeichenaufwand erforderten, jedoch einen sehr hohen Programmieraufwand nötig gehabt hätten. So wurde die Zeichentechnik stets dem jeweiligen Inhalt angepaßt.

Die Dreharbeiten auf der 16-mm-Trickfilmanlage des IWF in Göttingen führten W. DRÖGE und W. METZLER mit einem Zeitaufwand von 14 Arbeitstagen durch, einschließlich der Vertonung. Der Realfilmanteil (drehende Erdkugel mit markierten Antipodenpunkten (s. Filmausschnitt a) wurde von G. MATZDORF vom IWF gedreht. B. LIER vom IWF sei für seine Betreuung des Projektes und seine Unterstützung bei der technischen Herstellung vielmals gedankt. Ebenso danken die Autoren Frau E. FISCHER für ihre sorgfältige Arbeit bei der Herstellung der Schnittkopie. Die Herstellung des Films konnte nur gelingen durch die harmonische Zusammenarbeit und den engagierten Einsatz aller Beteiligten.

Erläuterungen zum Film

Der Film besteht aus fünf Abschnitten. Im ersten Abschnitt wird der BORSUKSche Satz im \mathbb{R}^2 , also im ebenen Fall, formuliert und erläutert. Antipodenpunkte werden dabei auf der Erdkugel veranschaulicht. Im zweiten Teil wird der Satz zum besseren Verständnis im \mathbb{R}^1 dargestellt und gezeigt, daß es sich dabei i. w. um den Zwischenwertsatz handelt. Im dritten und vierten Teil wird die Beweisidee an zwei graphisch gegebenen stetigen Abbildungen klar gemacht. Im fünften Teil wird ein Grenzübergang erläutert, der die allgemeine Gültigkeit des Satzes im \mathbb{R}^2 sichert. Die Beweisidee läßt sich auf höherdimensionale Räume \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) übertragen.

1. Der BORSUKSche Antipodensatz im \mathbb{R}^2

Zunächst wird das „Einheitsquadrat“ K im \mathbb{R}^2 dargestellt, s. Abb. 1. Es besteht aus allen Punkten der Ebene \mathbb{R}^2 , deren Koordinaten x_1 und x_2 dem Betrage nach nicht größer als 1 sind: $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$.

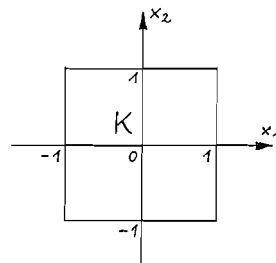


Abb. 1. Einheitsquadrat K

Darauf wird die Formulierung des Satzes angegeben, dessen Beweis das Anliegen des Filmes ist.

Satz 1 (BORSUKScher Antipodensatz im \mathbb{R}^2). Es sei f eine stetige Abbildung, die das Einheitsquadrat K in den Raum \mathbb{R}^2 abbildet. Gilt für alle Randpunkte x des Quadrates K die „Antipodenbedingung“

$$f(-x) = -f(x),$$

so existiert ein Punkt x_0 aus K mit

$$f(x_0) = 0.$$

Der Begriff „Antipode“ kommt aus der Geographie. Betrachtet man die Erde als eine Kugel um 0, so sind z. B. Zimbabwe-Rhodesien und Hawaii zwei zueinander antipodische Länder der Erde (s. Abb. 2.)

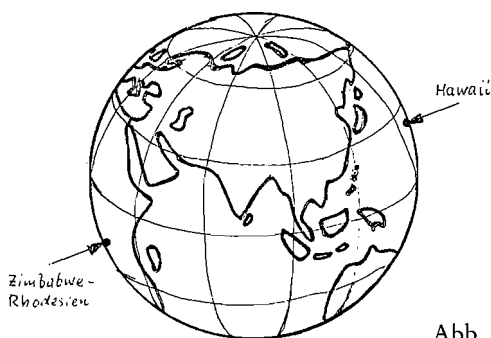


Abb. 2. Antipodenpunkte

Zur Veranschaulichung des Satzes 1 ist in Abb. 3 eine Abbildung $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ skizziert, die den Voraussetzungen des Satzes genügt.

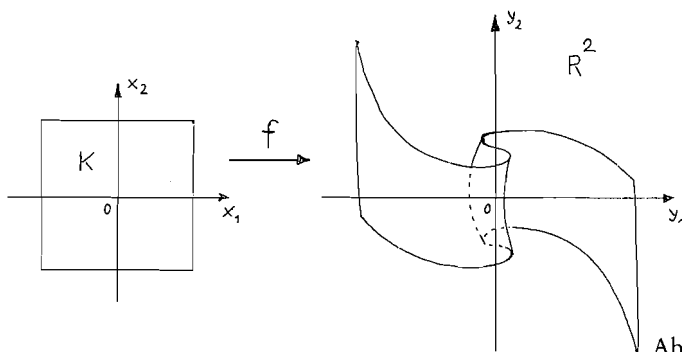


Abb. 3. Abbildung $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$

Dabei stellen wir uns vor, daß das Quadrat K seitlich in die Länge gezogen wurde, dann im mittleren Bereich gefaltet und schließlich noch etwas gebogen. Es entsteht so der Wertebereich $f(K)$, wie er rechts in Abb. 3 skizziert ist. Der angegebene Deformationsvorgang wird im dritten Abschnitt des Filmes dargestellt.

Die zentralsymmetrische Lage der „Randbildkurve“ rechts in Abb. 3 ist eine Folge der Antipodenbedingung. Als „Randbildkurve“ bezeichnen wir dabei das Bild

$f(\text{Rd } K)$ des Quadratrandes $\text{Rd } K$. Wir sehen übrigens deutlich, daß der Wertebereich $f(K)$ über dem Punkt 0 dreifach geschichtet liegt. Die skizzierte Abbildung hat also drei Nullstellen in K , d. h. drei Punkte x_0^1, x_0^2, x_0^3 mit $f(x_0^i) = 0$.

Den Wertebereich $f(K)$ unserer Abbildung können wir in fünf Mengen M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 zerlegen, wie es Abb. 4 zeigt. Dabei liegt der Wertebereich über M_1 und M_2 „einfach geschichtet“, über M_3 und M_4 jeweils „doppelt geschichtet“ und über M_5 offenbar „dreifach geschichtet“.

Wir nennen eine Abbildung, wie die skizzierte, eine Abbildung mit „endlicher Bildzerlegung“ und präzisieren diese Bezeichnung in folgender Definition. Dabei lassen wir uns von Abb. 4 leiten.

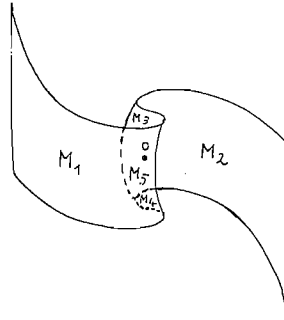


Abb. 4. Zur endlichen Bildzerlegung

Definition 1. Eine stetige Abbildung $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ besitzt „endliche Bildzerlegung“, wenn folgendes gilt:

- (a) Der Wertebereich von f läßt sich in endlich viele stückweise glatt berandete Mengen M_1, \dots, M_N zerlegen.
- (b) Über jedem M_k liegen dabei endlich viele homöomorphe Blätter bzgl. f . Jedes dieser Blätter ist ein abgeschlossener Polygonbereich in K .
- (c) Der Punkt 0 in \mathbb{R}^2 ist nicht Randpunkt einer der Mengen M_k .

Bemerkung. Zu (a): Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ läßt sich in „endlich viele Mengen M_1, \dots, M_N zerlegen“, wenn $M = \bigcup_{k=1}^N M_k$ gilt und je zwei verschiedene Mengen M_k keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Zu (b): Die Aussage (b) bedeutet folgendes: Das Urbild $f^{-1}(M_k)$ jeder Menge M_k läßt sich in endlich viele Teilmengen zerlegen, die jeweils durch f homöomorph auf M_k abgebildet werden. Die Teilmengen werden „Blätter über M_k “ genannt. Sie haben die Form von abgeschlossenen Polygonbereichen.

Abbildungen, die endliche Bildzerlegung besitzen, sind besonders anschaulich und gut zu handhaben. Wir rücken sie daher in den Mittelpunkt unserer Überlegungen und beweisen für sie die folgende schärfere Fassung des BORSUKSchen Satzes im \mathbb{R}^2 .

Satz 2. Es sei $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung. Gilt für alle Randpunkte x von K

$$f(-x) = -f(x),$$

und besitzt f endliche Bildzerlegung, so hat f eine ungerade Anzahl von Nullstellen.

Bemerkung. Satz 2 bedeutet gegenüber Satz 1 keine wirkliche Einbuße an Allgeme-

meinheit. Denn z. B. alle stückweise linearen Abbildungen $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ besitzen die Eigenschaften (a) und (b) der endlichen Bildzerlegung. ($f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt „stückweise linear“, wenn eine Zerlegung von K in endlich viele Dreiecke vorliegt, wobei f auf jedem dieser Dreiecke affin ist. D. h., daß f jedes dieser Dreiecke affin auf ein Dreieck im Bildbereich abbildet.) Man kann daher alle stetigen Abbildungen $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$, die den Voraussetzungen von Satz 1 genügen, durch Abbildungen mit endlicher Bildzerlegung gleichmäßig approximieren. Durch diesen Grenzübergang folgt Satz 1 aus Satz 2.

Unsere Aufgabe besteht im folgenden also darin, Satz 2 zu beweisen. Zum besseren Verständnis der Problemstellung wollen wir jedoch zuerst den BORSUKSchen Satz im \mathbb{R}^1 betrachten.

2. Der BORSUKSche Antipodensatz im \mathbb{R}^1

Eine kompakte, konvexe, symmetrische Menge im \mathbb{R}^1 , deren Inneres nicht leer ist, ist einfach ein Intervall der Form $[-a, a]$ mit $a > 0$. Damit bekommt der BORSUKSche Antipodensatz im \mathbb{R}^1 folgende einfache Form (vgl. Abb. 5).

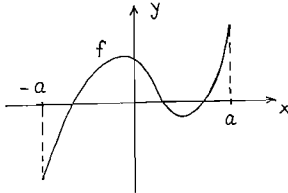


Abb. 5. BORSUKScher Satz im eindimensionalen Fall

Satz 3. Jede reellwertige Funktion f , die stetig auf einem Intervall $[-a, a]$ ist und $f(-a) = -f(a)$ erfüllt, hat mindestens eine Nullstelle.

Dies ist eine unmittelbare Folge des Zwischenwertsatzes für reellwertige Funktionen einer reellen Variablen. Umgekehrt läßt sich der Zwischenwertsatz aber auch mühelos aus Satz 3 herleiten. (Man hat eine gegebene stetige Funktion f auf $[x_0, x_1]$ mit $f(x_0)f(x_1) < 0$ nur stetig und nullstellenfrei auf ein symmetrisches Intervall $[-a, a]$ so zu erweitern, daß $f(-a) = -f(a)$ erfüllt ist.) Auf diese Weise sind Zwischenwertsatz und BORSUKScher Satz im \mathbb{R}^1 äquivalent.

Abb. 5 macht aber noch mehr deutlich, und zwar: Hat der Graph einer stetigen Funktion $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^1$ mit $f(-a) = -f(a)$ nur „echte Schnittpunkte“ mit der x-Achse, so ist die Anzahl dieser Schnittpunkte ungerade! (Man spricht hierbei von einem „echten Schnittpunkt“ x_0 , wenn man um x_0 ein Intervall $[x_0 - c, x_0 + c]$ ($c > 0$) legen kann, in dem x_0 einzige Nullstelle von f ist und in dem die Werte $f(x)$ mit $x < x_0$ ein anderes Vorzeichen haben als die Werte $f(x)$ mit $x > x_0$.)

Die obige Aussage über die ungerade Schnittpunktzahl wird im Film an mehreren Funktionen verdeutlicht, vgl. z. B. Abb. 6. Diese Ungeradheit der Nullstellenanzahl ist typisch für den BORSUKSchen Satz. Sie spiegelt sich auch in Satz 2 wider.

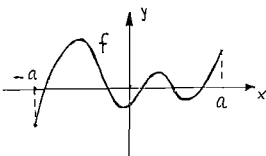


Abb. 6. Ungerade Nullstellenanzahl

3. Beweisidee im \mathbb{R}^2

Es folgt die Darstellung der Beweisidee von Satz 2, dessen Formulierung noch einmal wiederholt wird.

Satz 2. Es sei $f:K \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung. Gilt für alle Randpunkte von K

$$f(-x) = -f(x),$$

und besitzt f endliche Bildzerlegung, so hat f eine ungerade Anzahl von Nullstellen. Zum Beweise wird Abb. 7 betrachtet, in der der Wertebereich der Abbildung $f:K \rightarrow \mathbb{R}^2$ dargestellt ist, die wir schon früher vor Augen hatten (vgl. Abbildungen 3 und 4). Zusätzlich ist in Abb. 7 eine Halbgerade H mit Endpunkt 0 eingezeichnet, die die Ränder der Zerlegungsmengen M_k nur in „echten Schnittpunkten“ trifft. Die Schnittpunkte sind P_1, P_2, P_3, P_4 in Abb. 7. (Ein Schnittpunkt P_i von H und $\text{Rd } M_k$ heißt „echter Schnittpunkt“, wenn $\text{Rd } M_k$ in P_i lokal glatt ist und wenn H und $\text{Rd } M_k$ sich in P_i unter nichtverschwindendem Winkel schneiden.)

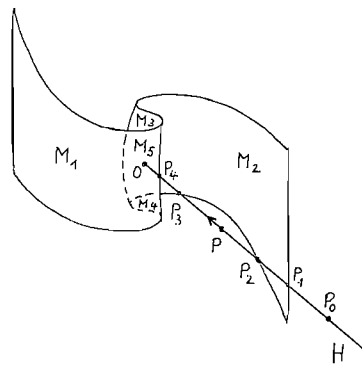


Abb. 7. Zur Beweisidee

Wir denken uns nun einen laufenden Punkt P auf der Halbgeraden H . Er beginne seinen Lauf bei einem Punkt P_0 , der von 0 weiter entfernt ist als jeder Punkt von $f(K)$. Von dort bewege sich P auf 0 zu.

Am Startpunkt P_0 seines Laufes besitzt P keinen Urbildpunkt bzgl. f , da P_0 ja außerhalb von $f(K)$ liegt. Überschreitet P dann den Punkt P_1 , so erhöht sich seine Urbildanzahl offenbar um 1, bei P_2 verringert sie sich um 1 und bei P_3 erhöht sie sich wieder um 1. Überschreitet P schließlich den Punkt P_4 , so stellen wir fest, daß sich seine Urbildanzahl um 2 vermehrt, da hier der Wertebereich eine „Faltenkante“ aufweist,

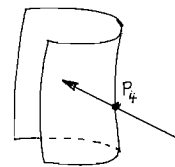


Abb. 8. Faltenkante

an der er „doppelt gefaltet“ ist, wie es die Abb. 8 nochmals hervorhebt. Lläuft P schließlich weiter bis zum Punkt 0 , so ändert sich seine Urbildanzahl nicht mehr. 0 hat also genau drei Urbildpunkte.

Was stellen wir bei diesem Vorgang fest? Zunächst unterscheiden wir: P_1, P_2 und P_3 sind Punkte der Randbildkurve, während P_4 nur innere Punkte von K als Urbilder hat. Es hat sich folgendes ergeben:

(I) Bei jedem Überschreiten der Randbildkurve ändert sich die Urbildanzahl von P um den Betrag 1. Alle übrigen Punkte tragen zur Urbildanzahl eine Änderung vom Betrage 2 bei oder lassen sie unverändert.

(II) Die Randbildkurve wird ungerade oft von P überschritten.

Mit anderen Worten: Die Überschreitungen der Randbildkurve bewirken insgesamt eine ungerade Änderung der Urbildanzahl, während die übrigen Punkte diese Ungeradheit nicht antasten, da sie ja nur Änderungen um die Beträge 2 oder 0 beisteuern. Die Ungeradheit der Nullstellenanzahl rührt also einzig und allein von der Randbildkurve her.

Ist dies immer so? D. h.: Gilt dies für jede Abbildung $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ des Satzes 2? Das ist tatsächlich der Fall: Die Randbildkurve überschreitet H stets ungerade oft. Wir drücken dies präziser in folgendem Hilfssatz aus.

Hilfssatz: $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ erfülle die Voraussetzungen von Satz 2. Ist H eine von 0 ausgehende Halbgerade, die die Randbildkurve $f(\text{Rd } K)$ nur in echten Schnittpunkten schneidet, so ist die Anzahl der Randpunkte x von K mit $f(x) \in H$ ungerade.

Der Film veranschaulicht, daß dies richtig sein muß: Man läßt einen Punkt auf der Randbildkurve von $f(a)$ nach $f(-a)$ laufen, s. Abb. 9. Die Gerade $G = HU(-H)$ wird dabei ungerade oft überquert, da $f(a)$ und $f(-a) = -f(a)$ auf verschiedenen Seiten von G liegen. Die Anzahl der Überquerungen sei m .

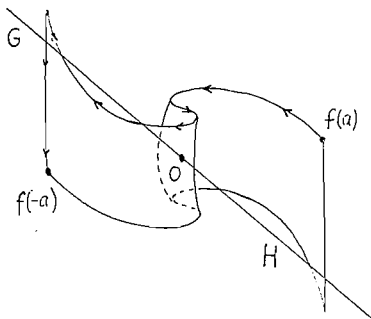


Abb. 9. Schnittpunkte der Randbildkurve mit G

Durchläuft der Punkt den verbleibenden Teil der Randbildkurve von $f(-a)$ bis $f(a)$, so überquert er wegen der Zentralsymmetrie die Gerade G ebenfalls genau m mal. Insgesamt wird G also $2m$ mal von der Randbildkurve überquert. Wiederum wegen der Zentralsymmetrie wird daher die Halbgerade H halb so oft überquert, also m mal, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Damit ist die Beweisidee klar: Zu einer Abbildung $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$, die die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, wähle man eine Halbgerade H wie in Abb. 7. Auf ihr wähle man zunächst einen Punkt P_0 außerhalb $f(K)$, der von 0 weiter entfernt liegt als jeder Punkt von $f(K)$.

In P_0 beginnend lasse man einen Punkt P auf H nach 0 laufen. Wir interessieren uns für seine Urbildanzahl bzgl. f . Zunächst, im Startpunkt P_0 , ist seine Urbildanzahl

Null. Beim Überschreiten der Randbildkurve ändert sie sich um 1 oder -1 (dabei setzen wir der Einfachheit halber voraus, daß die Randbildkurve doppel­punkt­frei ist). Da Randbildkurve und Halbgerade sich ungerade oft schneiden (nach dem Hilfssatz), wird dadurch insgesamt eine ungerade Änderung der Urbildanzahl des laufenden Punktes P bewirkt. Die übrigen Punkte erzeugen aber nur geradzah­lige Änderungen der Urbildanzahl, da hierbei höchstens „Faltenkanten“ überschritten werden wie in Abb. 8, die Änderungen vom Betrage 2 beitragen. Schematisch:

Änderung durch Faltenkanten:	gerade
Änderung durch Randbildkurve:	ungerade
Zusammen:	ungerade

Ist P bei 0 angelangt, so hat er damit eine ungerade Änderung seiner Urbildanzahl erfahren, d. h. 0 hat ungerade viele Urbilder. Das ist gerade die Behauptung des Satzes. –

4. Darstellung der Beweisidee an einem weiteren Beispiel

An einer zweiten, etwas komplizierteren Abbildung $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ – „Doppelfalte“ genannt – wird der Beweisgang ein weiteres Mal verdeutlicht, s. Abb. 10.

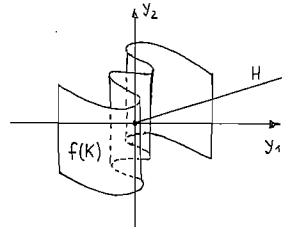


Abb. 10. Doppelfalte

5. Grenzübergang zu beliebigen stetigen Abbildungen

Wie schon im Abschnitt „Erläuterungen zum Film“, Absatz: „Der BORSUKSche Antipodensatz im \mathbb{R}^{2n} “ im Anschluß an Satz 2 erwähnt, kann man zu jeder stetigen Abbildung f , die die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt, eine Folge von stetigen Abbildungen f_n finden, die gleichmäßig gegen f konvergiert, wobei jedes f_n die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, also insbesondere endliche Bildzerlegung besitzt. Da jedes f_n mindestens eine Nullstelle x_n hat (f_n hat ja ungerade viele Nullstellen) folgt daraus, daß auch f mindestens eine Nullstelle x_0 besitzt. (Zum Beweise hat man aus der Folge (x_n) lediglich eine konvergente Teilfolge auszuwählen, deren Grenzwert dann eine Nullstelle von f sein muß.) Auf diese Weise folgt Satz 1 aus Satz 2.

Der Film zeigt den Wertebereich einer stetigen Abbildung $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Antipodeneigenschaft, die keine endliche Bildzerlegung besitzt. Es werden dabei die ersten Glieder f_1, f_2, f_3, \dots einer Folge von Abbildungen mit endlicher Bildzerlegung dargestellt, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Damit ist der Film beendet.

Wortlaut des gesprochenen Kommentars

Der BORSUKSche Antipodensatz im \mathbb{R}^2 .

Es sei f eine stetige Abbildung, die das Einheitsquadrat K in den Raum \mathbb{R}^2 abbildet: Gilt für alle Randpunkte x des Quadrats K die Antipodenbedingung: $f(-x) = -f(x)$ so existiert ein $x_0 \in K$ mit $f(x_0) = 0$.

Dieser Satz ist in allgemeiner Formulierung ein wichtiger Existenzsatz für Lösungen von Gleichungssystemen $f(x) = 0$.

Der Begriff Antipode kommt aus der Geographie. Betrachtet man die Erde als eine Kugel um 0, so sind zum Beispiel Rhodesien und Hawaii zwei zueinander antipodische Länder auf der Erdoberfläche.

Im folgenden wollen wir nun eine schärfere Formulierung des BORSUKSchen Antipodensatzes betrachten, aus der wir später den allgemeinen Satz ableiten werden.

Sei $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, gilt für alle Randpunkte x von K : $f(-x) = -f(x)$, und besitzt f endliche Bildzerlegung, so hat f eine ungerade Anzahl von Nullstellen.

Der Satz macht also folgende Voraussetzungen:

Die Abbildung f , die das Einheitsquadrat K in den \mathbb{R}^2 abbildet, sei stetig.

Für alle Randpunkte x von K soll die Antipodenbedingung: $f(-x) = -f(x)$ gelten.

Genügt f zusätzlich noch einer Zerlegungsbedingung an den Bildbereich, so behaupten wir: f hat eine ungerade Anzahl von Nullstellen.

Für reellwertige Funktionen erkennen wir in der Aussage des Satzes im wesentlichen den Zwischenwertsatz:

Auf einem abgeschlossenen Intervall $[-a, a]$ betrachten wir den Graphen einer stetigen Funktion f . Das Intervall ist symmetrisch, und es gilt für die beiden Randpunkte $-a, a$ die Bedingung: $f(-a) = -f(a)$.

Wir sehen, der Graph unserer Funktion hat einen echten Schnittpunkt mit der x -Achse, das heißt: einen Nulldurchgang.

Betrachten wir im gleichen Intervall andere Funktionen f , die nur echte Schnittpunkte, d.h. keine Berührungspunkte mit der x -Achse haben und die ebenfalls der Antipodenbedingung genügen, so stellen wir fest, daß alle die x -Achse ungerade oft schneiden.

Man erkennt andererseits: Es muß mindestens eine Nullstelle existieren.

Nachdem wir die Aussage des BORSUKSchen Satzes im \mathbb{R}^1 betrachtet haben, kommen wir nun zurück zum \mathbb{R}^2 .

Zur Erinnerung schauen wir uns noch einmal die Formulierung des Satzes an: Wir gehen also nun aus von einem symmetrischen, achsenparallelen Quadrat K um 0. Durch eine stetige Abbildung f bilden wir das Quadrat K in den Raum \mathbb{R}^2 ab. Wir erkennen deutlich: das Bild des Quadrates K unter der Abbildung f – eine Art Falte – ist eine ebene Figur, d.h. eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 .

Hier sieht man in einer Übersicht, wie die Abbildung f unser Quadrat K in den \mathbb{R}^2 abbildet.

Wir erkennen unmittelbar: Das Bild des Quadratrandes genügt der Antipodenbedingung. Es gilt also für alle Randpunkte x des Quadrates K : $f(-x) = -f(x)$.

Für unser gewähltes Beispiel wollen wir nun die Behauptung des Satzes überprüfen. Zur Vorbereitung betrachten wir zunächst im Bildbereich eine Gerade durch den Nullpunkt.

Aufgrund der Antipodenbedingung liegen $f(a)$ und $f(-a)$ auf verschiedenen Seiten der Geraden.

Wir wollen nun das Bild des Quadratrandes als eine Kurve betrachten, die von $f(a)$ bis $f(-a)$ läuft. Sie schneidet die Gerade einmal.

Aus Symmetriegründen schneidet die Kurve von $f(-a)$ bis $f(a)$ die Gerade ebenfalls einmal.

Betrachten wir eine weitere Gerade durch den Nullpunkt. Wegen der Antipodenbedingung liegen $f(a)$ und $f(-a)$ wiederum auf verschiedenen Seiten der Geraden.

Die Randbildkurven von $f(-a)$ bis $f(a)$ schneiden die Gerade jeweils dreimal. Die gesamte Randbildkurve wird von der Geraden also sechsmal geschnitten.

Diese Halbgerade hat demnach die halbe Anzahl von Schnittpunkten mit der Randbildkurve, also drei Schnittpunkte.

Hier erhalten wir einen Schnittpunkt mit der Randbildkurve: Wir betrachten nur solche Halbgeraden, die in 0 beginnen und nur echte Schnittpunkte und damit keine Berührungspunkte mit der Randbildkurve haben. Sie besitzen alle eine ungerade Anzahl von Schnittpunkten mit der Randbildkurve.

Wir haben gesehen: Dies ist eine Konsequenz der Antipodenbedingung!

Der \mathbb{R}^2 , in dem die Falte – das Bild des Einheitsquadrates K unter der Abbildung f – liegt, zerfällt in endlich viele Mengen, die die Eigenschaft haben, daß alle Punkte aus ein und derselben Menge die gleiche Anzahl von Urbildern bezüglich f haben. Sie werden durch die Ränder und Kanten der Falte begrenzt.

Das äußere hellblaue Gebiet hat keine Urbilder im Definitionsbereich von f . Die 0 ist nicht Randpunkt einer dieser Mengen. Erinnern wir uns für einen Moment zurück an die Formulierung des BORSUKSchen Satzes in der schärferen Form: Neben der Antipodenbedingung verlangen wir noch, daß f einer Zerlegungsbedingung an den Bildbereich genügt. Diese Bedingung wollen wir nun präzise fassen. Wir sagen: f besitzt endliche Bildzerlegung, wenn folgendes gilt:

- 1: Der Wertebereich wird zerlegt in endlich viele Mengen M_k , die stückweise glatt berandet sind. Über jedem M_k liegen dabei endlich viele homöomorphe Blätter bezüglich f . Jedes dieser Blätter ist ein Polygon.
- 2: Die 0 ist nicht Randpunkt einer dieser Mengen M_k .

Nach diesen Vorbereitungen werden wir nun zeigen, daß der Nullpunkt – wie im BORSUKSchen Satz behauptet – ungerade viele Urbilder besitzt:

Dazu betrachten wir eine Halbgerade, die in 0 beginnt und nur echte Schnittpunkte mit der Randbildkurve hat. Auf ihr lassen wir einen Punkt von außen auf die Falte zulaufen.

Zunächst hat er kein Urbild bezüglich f .

Beim Überschreiten der Randbildkurve ändert sich die Anzahl seiner Urbilder um 1. Denn im gelben Gebiet, oder anschaulich gesagt, überall dort, wo bei der Falte keine Überlappung vorliegt, haben alle Bildpunkte jeweils ein Urbild. Nun besitzt er wiederum 0 Urbilder. Nach erneutem Überschreiten der Randbildkurve hat er wieder 1 Urbild. Überschreitet der Punkt den Rand eines Gebietes, der zur Faltenkante gehört, so ändert sich die Anzahl seiner Urbilder bezüglich f um 2.

Innerhalb des grünen Gebietes, oder anschaulich ausgedrückt, überall dort, wo sich die Falte dreimal überlappt, haben alle Bildpunkte 3 Urbilder.

Da die 0 im Innern dieses grünen Gebietes liegt, hat sie somit 3, also eine ungerade Anzahl von Urbildern.

Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß im Quadrat K 3, d. h. ungerade viele Punkte existieren, die durch f auf den Nullpunkt des Bildbereiches abgebildet werden.

Damit haben wir für das Beispiel der Einfachfalte die Richtigkeit des BORSUKSchen Antipodensatzes festgestellt, denn überschreitet ein Punkt, der im Bildbereich auf einer Halbgeraden mit Anfangspunkt 0 läuft, den Rand eines Gebietes, der zur Faltenkante gehört, so ergibt sich eine Änderung der Urbildanzahl um 2.

Beim Überschreiten der Randbildkurve ergibt sich eine Änderung um ein Urbild. Da – wie wir festgestellt haben – die Halbgerade mit der Randbildkurve ungerade viele Schnittpunkte hat, folgt: f hat eine ungerade Anzahl von Nullstellen. Das ist gerade die Behauptung des BORSUKSchen Satzes in der verschärften Form:

Im folgenden wollen wir den Satz mit einer anderen Abbildung f überprüfen. Wir gehen wieder aus vom Einheitsquadrat K .

Eine stetige Abbildung f bildet wieder das Quadrat K in den R^2 ab. Diese Doppelfalte – das Bild des Quadrates K unter der Abbildung f – ist selbstverständlich wiederum eine ebene Figur.

Schauen wir uns die Abbildung in Ruhe in der Übersicht an.

Auch bei der Doppelfalte genügt das Bild des Quadratrandes wieder der Antipodenbedingung. Jede Halbgerade mit Anfangspunkt 0 hat wieder ungerade viele Schnittpunkte mit der Randbildkurve, vorausgesetzt, es liegen nur echte Schnittpunkte vor.

Und f besitzt endliche Bildzerlegung!

Die farbigen Zerlegungsflächen veranschaulichen wiederum die Mengen, die aus Punkten mit gleicher Anzahl von Urbildern bestehen.

Die 0 liegt nicht auf dem Rande einer dieser Mengen.

Wir betrachten nun wieder eine Halbgerade und lassen auf ihr einen Punkt von außen auf die Doppelfalte zulaufen. Zunächst hat er kein Urbild. Er überschreitet die Randbildkurve. Seine Urbildanzahl ändert sich um 1.

Beim Überschreiten des Randes eines Gebietes der einer Faltenkante gehört, erhöht sich die Anzahl seiner Urbilder um 2.

Erneut eine Änderung um 2. Im orangefarbigem Gebiet haben demnach alle Bildpunkte 5 Urbilder.

Die 0 besitzt somit fünf, also eine ungerade Anzahl von Urbildern. Mit anderen Worten: f hat ungerade viele und damit mindestens eine Nullstelle.

Allgemein stellt man für Abbildungen, die den Voraussetzungen des BORSUKSchen Antipodensatzes genügen, fest:

Überschreitet ein Punkt, der im Bildbereich auf einer Halbgeraden mit Anfangspunkt 0 läuft, den Rand eines Gebietes in einem Punkt P , so ergeben die Urbildpunkte von P , die zu Faltenkanten gehören, eine Änderung der Urbildanzahl um eine gerade Zahl. Diejenigen Urbildpunkte aber, die auf dem Quadratrang liegen, ergeben jeweils eine Änderung der Urbildanzahl vom Betrag 1.

Da die Halbgerade mit der Randbildkurve ungerade viele Schnittpunkte hat, folgt: f hat eine ungerade Anzahl von Nullstellen und damit mindestens eine.

Mit diesem Ergebnis erhalten wir jedoch unmittelbar die Aussage des BORSUKSchen Satzes für beliebige stetige Abbildungen $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$. Denn: Die – von uns betrachtete – Klasse der stetigen Abbildungen mit endlicher Bildzerlegung liegt dicht bezüglich gleichmäßiger Konvergenz in der Menge der stetigen Abbildungen.

Hier haben wir eine stetige Abbildung f skizziert, die keine endliche Bildzerlegung besitzt. Sie läßt sich jedoch durch Abbildungen mit endlicher Bildzerlegung – wie diese hier – beliebig gut approximieren.

Durch Grenzübergang erhält man also die Aussage des BORSUKSchen Satzes für alle stetigen Abbildungen f , die die Antipodenbedingung erfüllen. Wir wollen diesen allgemeinen Satz zum Schluß noch einmal formulieren:

Es sei f eine stetige Abbildung, die das Einheitsquadrat K in den Raum \mathbb{R}^2 abbildet: Gilt für alle Randpunkte x des Quadrats K die Antipodenbedingung: $f(-x) = -f(x)$, so existiert ein x_0 aus K mit $f(x_0) = 0$.

Anhang: Beweis des BORSUKSchen Satzes im \mathbb{R}^n

Es soll hier gezeigt werden, wie die im Film dargestellte Beweisidee des BORSUKSchen Satzes in einen exakten Beweis des Satzes im \mathbb{R}^n übergeht. Damit wird unser Gedankengang, von der Formulierung des Satzes über die Beweisidee bis zum fertigen Beweis, vervollständigt.

1. Der BORSUKSche Antipodensatz für Abbildungen mit endlicher Bildzerlegung

Es soll der folgende Satz bewiesen werden, der den im Film betrachteten Satz 2 auf \mathbb{R}^n ausdehnt.

Satz 2': Es sei $f: K^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Gilt für alle Randpunkte x von K^n

$$f(-x) = -f(x),$$

und besitzt f endliche Bildzerlegung, so ist die Anzahl der Nullstellen von f ungerade.

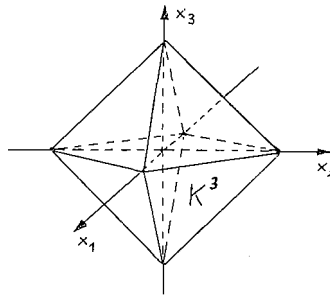


Abb. 11. Oktaeder K^3

Dabei ist K^n die Menge aller Punkte $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1.$$

Für $n=3$ ist K^n ein Oktaeder, s. Abb. 11. Man nennt K^n allgemein daher einen „Hyperoktaeder“.

Für $n=2$ ist K^n ein „auf der Spitze stehendes“ Quadrat, s. Abb. 12. Da es für die Beweisidee im Film natürlich gleichgültig ist, ob das Quadrat des Definitionsbereiches achsenparallel liegt oder dagegen um 45° gedreht ist, hat man hier die im Film dargestellte Situation.

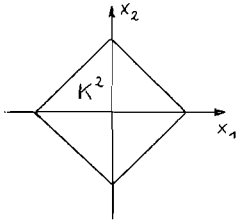


Abb. 12. Quadrat K^2

Völlig analog zur Definition 1 auf S. 18 wird der Begriff der endlichen Bildzerlegung in den R^n übertragen:

Definition 1'. Eine stetige Abbildung $f: K^n \rightarrow R^n$ besitzt „endliche Bildzerlegung“, wenn folgendes gilt:

(a) Der Wertebereich von f läßt sich in endlich viele stückweise glatt berandete Mengen M_1, \dots, M_N zerlegen.

(b) über jedem M_k liegen dabei endlich viele homöomorphe Blätter P_i^k bzgl. f (d. h. $f^{-1}(M_k) = \bigcup_i P_i^k$, und f bildet jedes P_i^k homöomorph auf M_k ab). Jedes P_i^k ist ein abgeschlossener Polyeder.

(c) $0 \in R^n$ ist nicht Randpunkt einer der Mengen M_k .

2. Hilfssätze und Beweis des Satzes 2'

Im folgenden sei $f: K^n \rightarrow R^n$, $n \geq 2$, eine Abbildung, wie sie im Satz 2' vorausgesetzt wird. Durch

$$f(K^n) = \bigcup_{k=1}^N M_k$$

sei die endliche Bildzerlegung von f beschrieben (vgl. Def. 1'). Der folgende Hilfssatz garantiert die Existenz einer Halbgeraden, wie sie in der Filmidee verwendet wird. Dabei wird zunächst von einer vollen Geraden G ausgegangen.

Hilfssatz 1: Es gibt eine Gerade G durch 0 in R^n mit folgenden Eigenschaften:

(a) G schneidet die Ränder der Zerlegungsmengen M_k nur in echten Schnittpunkten¹.

(b) Die Urbilder dieser Schnittpunkte liegen auf den Rändern der Blätter (Polyeder) P_i^k , und zwar im Inneren $(n-1)$ -dimensionaler Seiten der P_i^k . Jeder solcher Urbildpunkt gehört folglich genau zwei Blättern an.

Damit sind die Blätter P_i^k gemeint, die in Definition 1' (endliche Bildzerlegung) vorkommen, zuzüglich des „uneigentlichen Blattes“ $\overline{R^n \setminus K^n} = P_0^k$, also der abgeschlossenen Hülle des Komplementes von K^n in R^n .

Eine Gerade G , wie sie in Hilfssatz 1 beschrieben ist, nennen wir eine „reguläre Gerade“ (bzgl. f).

¹ Ein Punkt $P \in G \cap \text{Rd} M_k$ heißt „echter Schnittpunkt von G und $\text{Rd} M_k$, wenn $\text{Rd} M_k$ in P lokal glatt ist, und wenn G und $\text{Rd} M_k$ sich in P unter nichtverschwindendem Winkel schneiden.

Beweis des Hilfssatzes 1: Der Rand jeder Menge M_k ist stückweise glatt, d. h. er besteht aus endlich vielen glatten Hyperflächenstücken. Jedes dieser Hyperflächenstücke läßt sich durch eine Parameterdarstellung der Form $h: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ darstellen, wobei h stetig differenzierbar auf einer kompakten, stückweise glatt berandeten Menge $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ist. Damit ist $\bar{h} = h/|h|$ eine stetig differenzierbare Abbildung von D in $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$.

Ein Punkt x aus dem Inneren von D heißt „kritischer Punkt“, wenn die Jacobimatrix $J_{\bar{h}}(x)$ nicht Höchststrang hat, d. h. einen kleineren Rang als $n-1$.

$\bar{h}(x)$ heißt in diesem Falle ein „kritischer Wert“ von \bar{h} . Aus dem Lemma von SARD (vgl. DEIMLING [2]) folgt nun, daß die Menge der kritischen Werte von \bar{h} auf S^{n-1} das Maß Null hat. $\bar{h}(Rd)$ hat ebenfalls das Maß Null auf S^{n-1} , da RdD die Dimension $n-2$ besitzt. Diese Nullmengen hängen offensichtlich nicht von der gewählten Parameterdarstellung ab, sondern nur von dem dadurch repräsentierten Hyperflächenstück.

Wir betrachten nun die beschriebenen Nullmengen zu allen glatten Hyperflächenstücken der Ränder M_k und vereinigen diese Nullmengen zu einer Menge M_0 . M_0 hat wiederum das Maß Null auf S^{n-1} , da hierbei nur endlich viele Nullmengen vereinigt werden.

Schließlich vereinige man alle $(n-2)$ -dimensionalen Seiten der Polyeder P_k^* zu einer Menge A . (Bei dreidimensionalen Polyedern, wie z. B. Tetraedern, wären dies die Kanten.) Die Menge $\bar{f}(A)$, mit $\bar{f} = f/|f|$, liegt auf S^{n-1} und hat dort ebenfalls die Dimension $n-2$, folglich das Maß Null.

Man wähle nun einen Punkt $p \in S^{n-1}$, der weder zu M_0 noch zu $\bar{f}(A)$ gehört. Einen solchen Punkt gibt es, da M_0 und $\bar{f}(A)$ auf S^{n-1} das Maß Null haben. Die Gerade G , bestehend aus allen $x = tp$ mit beliebigem reellem t , hat dann die gewünschten Eigenschaften (a) und (b). Denn aus $p \notin M_0$ folgt, daß alle Schnittpunkte s von G mit Rändern der M_k echt sind. Aus $p \notin \bar{f}(A)$ folgt schließlich, daß jeder Urbildpunkt x eines solchen Schnittpunktes s nicht einer $(n-2)$ -dimensionalen Seite eines Polyeders P_k^* angehören kann und folglich im Inneren $(n-1)$ -dimensionaler Seiten der P_k^* liegen muß. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. –

Bemerkung. Würde man die Mengen M_k in der Definition der endlichen Bildzerlegung als Polyeder voraussetzen, an Stelle von „stückweise glatt berandet“, so würde der Beweis von Hilfssatz 1 viel einfacher werden. Er wäre elementar-geometrisch sofort klar, und man benötigte nicht das immerhin tiefliegende SARDsche Lemma. Eine Einbuße an Allgemeinheit würde dabei nicht eintreten, da die so definierten Abbildungen $f: K^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ebenfalls dicht in der Menge der stetigen $f: K^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ liegen, bzgl. gleichmäßiger Konvergenz. (Denn alle „stückweise linearen“ Abbildungen auf K^n wären von der genannten Art.) Wir haben trotzdem den vorliegenden Weg gewählt, da stückweise glatt berandete Bereiche sich zur filmischen Veranschaulichung hier besser eignen. –

Im folgenden sei G eine reguläre Gerade, wie sie in Hilfssatz 1 angegeben ist. Sie werde beschrieben durch

$$G: y(t) = tp, \quad t \text{ reell,}$$

mit einem festen Vektor $p \in \mathbb{R}^n, |p| = 1$. H sei die in G enthaltene Halbgerade

$$H: y(t) = tp, \quad t \geq 0.$$

Es sei $A(t)$ die Anzahl der Urbildpunkte von $y(t) \in H$ bzgl. f , also

$$A(t) = \text{Anzahl der Elemente von } f^{-1}(y(t)), \quad t \geq 0.$$

Für das im Film verwendete Beispiel, Abb. 7, hat $A(t)$ die in Abb. 13 skizzierte Gestalt.

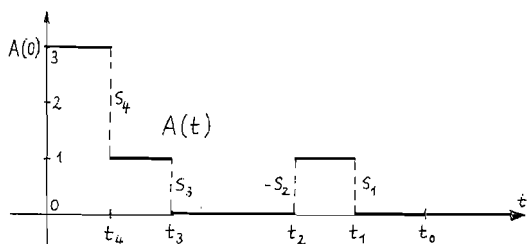


Abb. 13. Anzahl der Urbilder

Mit $y(t_1), \dots, y(t_m)$ ($t_1 > t_2 > \dots > t_m$) bezeichnen wir die Schnittpunkte der Halbgeraden H mit den Rändern der M_k . (Es kann nur endlich viele solche Schnittpunkte geben, da sie sich sonst in einem Punkt häufen würden, der unechter Schnittpunkt ist.) $A(t)$ (mit $t \geq 0$) ist eine stückweise konstante Funktion, die nur in den Punkten t_i unstetig sein kann. Die Sprünge

$$S_i = A(t_i - 0) - A(t_i + 0)$$

in t_i nennen wir auch die „Änderung der Urbildanzahl in $y(t_i)$ “. In unserem Beispiel, Abb. 13, ist $S_1 = 1, S_2 = -1, S_3 = 1, S_4 = 2$. Die Summe dieser Änderungen, $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 3$, ist dann $A(0)$, d. h. die Urbildanzahl von 0. Das Studium der Änderungen S_i befähigt uns also, Aussagen über die gesuchte Urbildanzahl von 0 zu bekommen. Die geschieht in den beiden folgenden Hilfssätzen.

Hilfssatz 2. Es sei $s = y(t_i)$ ein Schnittpunkt der Halbgeraden H mit dem Rand einer Menge M_k , und x einer seiner Urbildpunkte bzgl. f .

(a) Ist x Randpunkt von K^n , so trägt x zur Änderung der Urbildanzahl in s den Anteil $+1$ oder -1 bei.

(b) Ist x innerer Punkt von K^n , so trägt er zur Änderung der Urbildanzahl in s den Anteil $+2, -2$ oder 0 bei.

Beweis. x gehört zu genau zwei Blättern B_1 und B_2 (s. Hilfssatz 1). Zu (b): Ist x innerer Punkt von K^n , so können drei Fälle eintreten. 1. Fall: B_1 und B_2 liegen beide über M_k . Damit hat jeder Punkt aus $H \cap \overset{\circ}{M}_k$ ($\overset{\circ}{M}_k =$ Inneres von M_k) ein Urbild in B_1 und eins in B_2 , während die Punkte außerhalb M_k keinen Urbildpunkt in B_1 oder B_2 haben. Bzgl. B_1 und B_2 gibt es also in M_k zwei Urbildpunkte mehr als außerhalb von M_k . Je nachdem, ob ein Punkt auf H in M_k hinein- oder aus M_k herausläuft, verändert dies die Urbildanzahl des Punktes um 2 oder -2 (s. Abb. 14 (I)).

2. Fall: B_1 und B_2 liegen über verschiedenen Mengen M_k, M_j . Damit hat jeder Punkt aus $H \cap (M_k \cup M_j)$ genau ein Urbild in $M_k \cup M_j$, wodurch keine Änderung der Urbildanzahl in s bewirkt wird, s. Abb. 14 (II).

3. Fall: B_1 und B_2 liegen nicht über M_k . Dann liegen sie beide über einer anderen Menge M_j , für die das gleiche wie in Fall 1 zutrifft.

Zu (b): Ist x Randpunkt von K^n , so ist eines der beiden Blätter B_1, B_2 das „uneigentliche Blatt“ $\mathbb{R}^n \setminus K^n$, das andere, z. B. B_1 , liegt über M_k . Lläuft also ein Punkt auf H

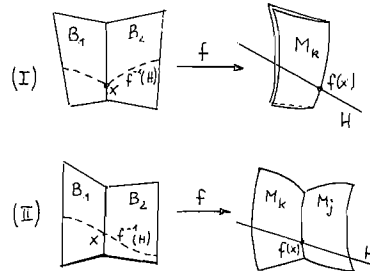


Abb. 14. Zu Hilfssatz 2

bei s in M_k hinein, so kommt ein Urbildpunkt in B_1 hinzu, beim Herauslaufen verringert sich seine Urbildanzahl entsprechend um 1. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen. –
 Hilfssatz 3: Die Anzahl der Randpunkte x von K^n , deren Bilder $f(x)$ auf der Halbgeraden H liegen, ist ungerade.

Man erkennt sofort, daß daraus die Richtigkeit von Satz 2' folgt, dessen Beweis ja unser Hauptanliegen ist.

Beweis des Satzes 2': Da es nach Hilfssatz 3 ungerade viele $x \in \text{Rd } K^n$ gibt, mit $f(x) \in H$ und da nach Hilfssatz 2 jeder dieser Punkte x eine Änderung der Urbildanzahl in $f(x)$ vom Betrage 1 beisteuert, bewirken sie alle zusammen eine ungerade Änderung der Urbildanzahl $A(t)$. (Wir bemerken, daß $f(x)$ dabei auf dem Rande einer der Mengen M_k liegt, da x Randpunkt eines Blattes ist). Alle übrigen Punkte von K^n tragen nach Hilfssatz 2 höchstens eine geradzahlige Änderung zur Urbildanzahl $A(t)$ bei. Zusammengenommen ändert sich $A(t)$ damit um einen ungeraden Betrag, wenn t , beginnend mit einem $t_0 > t_1$, nach 0 läuft; anders ausgedrückt: Die Summe $S_1 + S_2 + \dots + S_m$ aller Sprünge von $A(t)$ ist ungerade. Damit ist $A(0)$, die Anzahl der Urbilder von 0, ungerade, womit Satz 2' bewiesen ist. –

Der noch ausstehende Beweis des Hilfssatzes 3 wird induktiv geführt. Dazu bemerken wir zunächst, daß Satz 2' für $n = 1$ offenbar richtig ist, wie aus Abschnitt III.2. hervorgeht. Wir nehmen nun an, daß Satz 2' für $n-1 \geq 1$ an Stelle von n richtig ist und beweisen damit Hilfssatz 3, woraus dann in der beschriebenen Weise Satz 2' folgt.

Beweis von Hilfssatz 3: Die reguläre Gerade G , deren Existenz in Hilfssatz 1 gesichert ist, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich der x_n -Achse in \mathbb{R}^n . (Andernfalls läßt sich dies durch eine Drehung des \mathbb{R}^n erreichen.) Durch

$$P(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}), \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

beschreiben wir die „kanonische Projektion“ $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ und durch

$$\text{Rd}_+ K^n = \{x \in \text{Rd } K^n \mid x_n \geq 0\}$$

die „obere Randhälfte“ von $Rd\ K^n$, s. Abb. 15. Die Einschränkung von P auf Rd_+K^n wird P_+ genannt;

$$P_+ : Rd_+K^n \rightarrow K^{n-1}$$

ist ein Homöomorphismus.

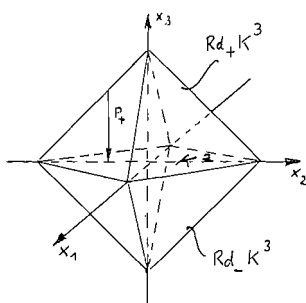


Abb. 15. Zu Hilfssatz 3

Man überlegt sich damit leicht, daß die Abbildung

$$f_+ = P \circ f \circ P_+^{-1} : K^{n-1} \rightarrow R^{n-1}$$

die Voraussetzungen des Satzes 2' für $n-1$ (statt n) erfüllt. f_+ hat nach Induktionsvoraussetzung damit ungerade viele Nullstellen. Ist x_+ so eine Nullstelle, so heißt dies:

$$0 = f_+(x_+) = P(f(P_+^{-1}(x_+)))$$

also $0 = P(f(x')),$ mit $x' = P_+^{-1}(x_+),$

d. h. $f(x') \in G.$

x' liegt auf Rd_+K^n . Jede Nullstelle x_+ von f_+ liefert also einen Punkt $x' = P_+^{-1}(x_+)$ auf Rd_+K^n mit $f(x') \in G$. Damit ist die Anzahl a dieser Punkte x' ungerade. Wegen der Antipodenbedingung gibt es auf der „unteren Randhälfte“ $Rd_-K^n = -Rd_+K^n$ ebenfalls genau a Punkte x'' mit $f(x'') \in G$. Der Rand $Rd\ K^n$ enthält damit genau $2a$ Punkte x mit $f(x) \in G$. Daher gibt es aber genau $2a/2 = a$ Punkte $x \in Rd\ K^n$, deren Bilder $f(x)$ auf der Halbgeraden H liegen, was wiederum aus der Symmetrie der Antipodenbedingung folgt. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen und nach dem Vorangegangenen auch Satz 2'. -

3. Beweis des Satzes A mit Zusatz

Die stetigen Abbildungen $f: K^n \rightarrow R^n$ mit endlicher Bildzerlegung und Antipodeneigenschaft liegen bzgl. gleichmäßiger Konvergenz dicht in der Menge der stetigen $f: K^n \rightarrow R^n$ mit Antipodeneigenschaft. Damit folgt Satz A in Abschnitt I durch Grenzübergang aus Satz 2' in gewohnter Weise. Die ungerade Nullstellenanzahl in Satz 2' (wobei f in jeder Nullstelle lokal homöomorph ist) zeigt unmittelbar, daß f in Satz 2' ungeraden Abbildungsgrad bzgl. K^n und 0 hat. Durch den beschriebenen Grenzübergang überträgt sich dies auf f in Satz A, (s. DEIMLING [2]). Damit liefert der Beweisgang des Filmes auch dieses tieferliegende Ergebnis der Topologie.

4. Schlußbemerkung

Zusammenfassend darf gesagt werden, daß die hier dargestellte Beweisidee sich zur Verfilmung gut eignet. Denn einerseits ist die Beweisidee anschaulich und im Kern einfach (entlangfahren auf einer Halbgeraden), andererseits erfordert die exakte Durchführung des Beweises noch eine Reihe präziser Einzelbetrachtungen. Der Leser, der nur mit der exakten Beweisführung bekannt gemacht wird, könnte daher den Faden verlieren, und die Kernidee könnte ihm verborgen bleiben. Der Film hebt aber gerade diese zentrale Idee hervor. An ihr kann sich das Denken des Betrachters entzünden, befreit vom Ballast der Details, und ihn möglicherweise so zu neuen Erkenntnissen führen. Eine Wirkung dieser Art kann als das höchste Ziel mathematischen Filmens angesehen werden.

Literatur

- [1] BORSUK, K.: Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre. *Fundamenta Math.* **20** (1933), 177–190.
- [2] DEIMLING, K.: *Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade*. Berlin – Heidelberg – New York 1974.
- [3] DRÜGE, W., und G. KLEIN: Ein Beweis des Borsukschen Antipodensatzes auf der Grundlage anschaulichen Schließens. Staatsexamensarbeit an der Gesamthochschule Kassel, FB. Math., 1980.
- [4] MANI, P.: Zwei kombinatorisch-geometrische Sätze vom Typus Sperner-Tucker-Ky Fan. *Monatsh. Math.* **71** (1967), 427–435.
- [5] KRASNOSELSKII, M. A.: *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*. Oxford – London – New York – Paris 1964.
- [6] WILLE, F.: *Analysis, eine anwendungsbezogene Einführung*. Stuttgart 1976.

Abbildungsnachweis

Abb. 1–15: F. WILLE.