29
Schätzung von Erwartungswert und Varianz

Jörn Loviscach

Versionsstand: 29. September 2012, 19:50

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos: http://www.j3L7h.de/videos.html

1 Stichprobe und Grundgesamtheit

Nun kommen wir von der Stochastik = Wahrscheinlichkeitslehre zu elementaren Ideen der mathematischen Statistik. In der Bürokratie ist Statistik, Kennzahlen aus langen Listen an Daten zu gewinnen. In der Mathematik ist Statistik mehr oder minder, Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen oder Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsvariablen mit Hilfe von Experimenten zu bestimmen.

Typischerweise möchte man von einer Stichprobe [sample], die man im Experiment untersucht hat, auf Verteilung in der Grundgesamtheit [population] schließen:

1

2 Schätzung des Erwartungswerts

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X sei zu bestimmen. Man macht N Messungen und erhält dabei die Ergebnisse $x_1, \ldots, x_N$. Was ist dann eine sinnvolle Schätzung für den Erwartungswert $\mu = E[X]$ der Zufallsvariable = Mittelwert der Grundgesamtheit?

Eine gute Schätzung für μ ist offensichtlich der Mittelwert $\overline{x}$ der Stichprobe [sample mean]:

2

Und das aus zwei Gründen:

- Dieser Mittelwert geht gegen μ, wenn man nicht $N = 10$, sondern 100, 1000 usw. Versuche macht („Gesetz der großen Zahlen").
- Im Mittel ist dieser Mittelwert gleich μ, denn:

  3

Wie jede Schätzung ist auch diese Schätzung sinnlos, wenn man keine Idee hat, wie groß der Fehler ist: Wie weit ist also der Mittelwert $\overline{x}$ von N Versuchen typischerweise vom Erwartungswert entfernt? Annahme: Die Abweichungen der einzelnen Messungen sind unabhängig voneinander. Die Varianz des Mittelwerts ist dann die Varianz σ^2 des einzelnen Messwerts durch N. Hier der Einfachheit halber nur für $N = 2$ gezeigt:

4

Die Standardabweichung des Mittelwerts von N Werten ist die Wurzel daraus. Sie verringert sich also um den Faktor $1/\sqrt{N}$. Mittelwertbildung ist ein (zu?) aufwendiges Verfahren, um die Genauigkeit einer stark fluktuierenden Messung deutlich zu verbessern!

3 Schätzung der Varianz

Nun sei die Varianz einer Zufallsvariablen X zu bestimmen. Man macht wieder N Messungen und erhält dabei die Ergebnisse $x_1, \ldots, x_N$. Was ist dann eine sinnvolle Schätzung für die Varianz $\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$ der Zufallsvariable, also für die Varianz der Grundgesamtheit?

Eine Schätzung für σ^2 könnte (könnte!) die „unkorrigierte Stichprobenvarianz" sein:

5

Dies stimmt im Grenzwert, wenn man nicht 10, sondern 100, 1000 usw. Versuche macht (das Gesetz der großen Zahlen für den Erwartungswert vom Quadrat von $(X - E[X])^2$). **Aber** der Erwartungswert der unkorrigierten Stichprobenvarianz von N Messungen ist etwas zu klein, denn der Mittelwert $\overline{x}$ ist nicht der Erwartungswert $\mu = E[X]$, sondern der Schwerpunkt der Stichprobe:

6

Annahme wieder: Die Abweichungen der einzelnen Messungen sind unabhängig voneinander. Dann ist der Erwartungswert der unkorrigierten Stichprobenvarianz um den Faktor $\frac{N-1}{N}$ zu klein. Hier der Einfachheit halber nur für $N = 2$ gezeigt:

7

Daher nimmt man Folgendes als (korrigierte) Stichprobenvarianz [sample variance] s^2:

8

Das ist die übliche Schätzung der Varianz σ^2 der Zufallsvariable X, also der Grundgesamtheit. Die (korrigierte) Standardabweichung der Stichprobe ist

9

. Deren Erwartungswert ist übrigens dann nicht unbedingt die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit, aber das scheint kaum jemanden zu stören.

Streng genommen muss man nun noch untersuchen, wie präzise diese Schätzung der Standardabweichung ist – wie groß also sozusagen der Fehler der Schätzung des Fehlers ist. Das tut sich aber praktisch niemand an.

Allerletzte Randnotiz: Mittelwert und Standardweichung der Stichprobe sind empfindlich gegenüber Ausreißern [outliers]. Eigentlich sind Perzentilen sinnvoller, da robuster [robust statstics].