VERÖFFENTLICHUNG DER REICHSSTELLE FÜR DEN UNTERRICHTSFILM ZU DEM HOCHSCHULFILM Nr. C 98

Das einschalige Drehhyperboloid.

Von Prof. Dr. R. BALDUS

(ordentlicher Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule München).

Das einschalige Drehhyperboloid.

Von Prof. Dr. R. BALDUS

(ordentlicher Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule München).

Ueber die Herstellung dieses Films findet man Einzelheiten zu Beginn und am Ende der Veröffentlichung der Reichsstelle für den Unterrichtsfilm zu dem Hochschulfilm „Der Drehkegel" Nr. C 97.

Der Film soll die Erzeugung des einschaligen Drehhyperboloids in zwei Arten als Drehfläche zeigen, außerdem die verschiedenen Arten ebener Schnitte der Fläche.

Das einschalige Drehhyperboloid kann in zwei besonders einfachen Weisen als Drehfläche erzeugt werden, nämlich durch Drehung einer Hyperbel um ihre imaginäre Achse oder durch Drehung einer Geraden um eine zu ihr windschiefe und zu ihr nicht senkrechte Achse. Die erste Art der Erzeugung zeigt der Film zuerst; will man die Hyperbel dabei eine volle Umdrehung beschreiben lassen, dann genügt es, nur einen ihrer zwei Aeste zu betrachten. Die Fläche ist dabei im Film zunächst nicht in der darstellend-geometrisch einfachsten Lage dargestellt, die Drehachse senkrecht zur einen Tafel, sondern in anschaulich vorteilhafterer Weise so, daß die zuerst lotrecht gedachte Achse gekippt ist, und zwar mit ihrem oberen Teile gegen den Beschauer hin. Der Kehlkreis der Fläche erscheint dann als Ellipse, deren Oberseite dem Beschauer zugewendet ist.

Diese Aufrißellipse des Kehlkreises erscheint zuerst, dann die zur Kreisebene senkrechte Drehachse durch den Kreismittelpunkt, hierauf eine sich von der Drehachse nach links erstreckende Halbebene, in dieser der erzeugende Hyperbelast. Dieser wird nun, von oben gesehen im Uhrzeigersinne, um die Achse gedreht und erzeugt so das Drehhyperboloid, zuerst dessen rückwärts liegende Hälfte, die dann allmählich von der wachsenden vorderen Hälfte teilweise überdeckt wird. 16 auf dem Drehhyperboloid gleichverteilte Stellungen der erzeugenden Hyperbel werden weiß hervorgehoben. Dann erscheint noch auf dem Drehhyperboloid der ebenfalls weiß gezeichnete Kehlkreis. Hier und im folgenden ist das Hyperboloid zur Hebung der Anschaulichkeit bei fester Beleuchtung mit seinen Isophoten dargestellt.

Nun wird das Drehhyperboloid durch Drehung einer Geraden um eine zu ihr windschiefe Achse erzeugt. Dabei ist die Achse die gleiche wie bisher, die Gerade überschneidet im Aufriß die Achse, und zwar liegt die Gerade vorn. Die Gerade dreht sich nun, wieder von oben gesehen im Uhrzeigersinn, um die Achse und erzeugt dabei die Fläche. Abermals sind 16 gleich verteilte Lagen der erzeugenden Kurve, hier der Geraden, weiß hervorgehoben. Dreht man im Raum eine Kurve um eine Achse, dann erhält man eine Drehfläche; liegt die Kurve mit der Achse nicht in einer Ebene, dann erhält man dieselbe Drehfläche, indem man die Kurve an irgendeiner durch die Drehachse gelegten Ebene spiegelt und dieses Spiegelbild um die Achse dreht. Daraus folgt für den Fall hier, daß man dasselbe Drehhyperboloid bekommt, indem man z. B. die Anfangslage der gedrehten Geraden an der Ebene spiegelt, die durch die Achse senkrecht zur Aufrißtafel verläuft, und nun diese neue Gerade dreht. Auch hier werden die 16 gleich verteilten Lagen der Geraden der Reihe nach gezeigt. Damit hat man die beiden Scharen von Erzeugenden der Fläche. Auch hier erscheint wieder der Kehlkreis, er ist der Parallelkreis, den der Punkt der erzeugenden Geraden beschreibt, der die kleinste Entfernung von der Achse hat. Zum Vergleiche der beiden Erzeugungen der Fläche rückt nun von rechts die zuerst gewonnene Fläche herein, dann verschwinden die erzeugenden Hyperbeln der einen, die Geraden der anderen und man hat die beiden kongruenten Flächenbilder.

Von jetzt an wird das einschalige Drehhyperboloid, dessen anschauliche Vorstellung nun gewonnen ist, in einer darstellend-geometrisch besonders einfachen Lage gezeigt, nämlich mit der Drehachse senkrecht zur Grundrißebene. Das Drehhyperboloid ist dabei als massiver Körper gedacht, in der linken Bildhälfte ist die Vorderansicht der Fläche, der Aufriß, in der rechten Bildhälfte ein Seitenriß, nämlich die Ansicht der Fläche von links, dargestellt. In beiden Rissen erscheinen nun der Reihe nach die 16 Einzellagen der vorher gezeigten erzeugenden Geraden der einen Schar, dann die der anderen Schar. Die beiden Scharen verschwinden und es erscheinen der Reihe nach, soweit sie sichtbar sind, die 16 Lagen des erzeugenden Hyperbelastes der zuerst vorgeführten Entstehung der Fläche durch Drehung einer Hyperbel; dabei gibt es Lagen, die in keinem der beiden Risse sichtbar sind.

Nun wird eine Schnittebene parallel zur Flächenachse genommen, die senkrecht zur Aufrißtafel steht, deren Aufriß daher eine zur Achse parallele Gerade ist. Diese Gerade liegt zunächst links vom Aufriß, bewegt sich dann, immer parallel zur Achse bleibend, gegen den Aufriß der Fläche hin. Sobald sie in den dargestellten Teil des Fächenaufrisses eindringt, entsteht eine Schnitthyperbel, deren wahre Gestalt man im Seitenriß sieht. Je mehr sich nun die Gerade und damit die Ebene, deren Aufriß sie ist, der Flächenachse nähert, desto näher rücken die Scheitel der Schnitthyperbel zusammen; bei Berührung der Schnittebene mit dem Kehlkreis artet die Schnittfigur in zwei sich auf dem Kehlkreise schneidende Gerade aus. Die Schnittebene rückt weiter auf die Flächenachse zu, die Schnitte sind wieder Hyperbeln, die sich von den beiden soeben genannten Geraden ablösen, und zwar in dem Scheitelwinkelraum, der rechts und links liegt, während die bisherigen Schnitthyperbeln oben und unten lagen. Wenn die Schnittebene die Flächenachse erreicht hat, ist die Schnitthyperbel die Umrißhyperbel des Seitenrisses. Damit schließt diese Bewegung der Schnittebene, da bei der weiteren Bewegung nur soeben gezeigte Schnitte in umgekehrter Reihenfolge wiederkehren würden.

Jetzt sieht man wieder den Aufriß und Seitenriß des nicht geschnittenen Hyperboloids. Im Aufriß ist die von rechts oben nach links unten laufende Asymptote der Umrißhyperbel eingetragen und eine Schnittebene angenommen, die wieder senkrecht zur Aufrißtafel steht, die aber zu dieser Asymptote parallel ist. Ihr Aufriß ist daher eine — im Aufriß links oben liegende — Parallele zu dieser Asymptote. Die Schnittebene wird nun wieder parallel verschoben, und zwar zur Asymptote hin, sie schneidet die Fläche in jeder Stellung in einer Parabel, da die parallel zu ihr durch die genannte Asymptote gelegte Ebene die Fläche in zwei parallelen Geraden, deren Aufrisse in der Asymptote aufeinanderfallen, schneidet; die Achse des Seitenrisses der Parabel steht im Bilde lotrecht. Der Parabelscheitel des Seitenrisses rückt mit dem Fortschreiten der Schnittebene immer tiefer und aus dem Bilde heraus, der sichtbare Parabelteil nähert sich allmählich der Figur zweier lotrechter Geradenstücke. Fällt der Aufriß der Schnittebene auf die genannte Asymptote, dann artet der Schnitt in zwei parallele, im Seitenriß lotrechte Gerade aus. Beim Weiterwandern würden nur dieselben Schnittkurven in umgekehrter Reihenfolge auftreten, daher wird diese Bewegung nicht weiter verfolgt.

In dem nun folgenden Teile des Films ist der Aufriß der Schnittebene wieder eine Gerade, die aber nicht mehr, wie im vorhergehenden Teile, zu der einen Asymptote der Aufrißhyperbel parallel ist, sondern im Uhrzeigersinne dagegen etwas gedreht. Die Ebene wird wieder parallel auf das Hyperboloid zu bewegt. Als Schnitte hat man Ellipsen. Diese Bewegung der Schnittebene wird soweit verfolgt, bis die Ebene durch den Flächenmittelpunkt geht. Weiterhin würden den gezeigten kongruente Ellipsen in umgekehrter Reihenfolge auftreten.

Es werden nun im letzten Teile dieses Films weitere ebene Schnitte des Hyperboloids gezeigt. Die Fläche ist nun lediglich im Aufrisse dargestellt, die Schnittebene dreht sich um eine zur Aufrißtafel senkrechte Gerade a, deren Aufriß in den Mittelpunkt der Umrißhyperbel des Aufrisses fällt. In der rechten Bildhälfte, in der bisher der Seitenriß der Fläche und des Schnittes gezeigt wurde, ist jetzt die wahre Gestalt der Schnittfigur dargestellt. Als erstes ist der Kehlkreis der Fläche ausgeschnitten. Nun wird die Schnittebene nicht, wie bisher, kontinuierlich gedreht, sondern sprungweise, und zwar so, daß sich ihr Aufriß entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne dreht. Die Schnittellipse behält ihre kleine Achse bei, während ihre große Achse wächst. Sie nähert sich in der Gestalt zwei parallelen Geraden. Nach 3 Zwischenlagen ist der Aufriß der Schnittebene die eine Asymptote der Umrißhyperbel des Aufrisses und die

Schnittellipse artet in zwei parallele Gerade aus. Die Schnittebene berührt jetzt den Asymptotenkegel der Fläche, der aus den Geraden gebildet wird, welche durch den Flächenmittelpunkt parallel zu den Erzeugenden der Fläche gelegt sind. Die Asymptoten der Umrißhyperbel des Aufrisses gehören zu den Erzeugenden dieses Asymptotenkegels. Bisher traf die Schnittebene den Asymptotenkegel zuerst nur in der Spitze, in der letzten Lage berührte sie ihn. Bei weiterer Drehung der Schnittebene wird der Asymptotenkegel in zwei Erzeugenden getroffen. Daher ist der Schnitt der Ebene mit dem Hyperboloid eine Hyperbel, deren Asymptoten diese beiden Erzeugenden sind. Man sieht daher jetzt als Schnittfigur eine Hyperbel, welche zunächst von zwei parallelen Geraden nur wenig verschieden ist. Die kleine Achse der vorher gezeigten Schnittellipsen ist reelle Achse dieser Schnitthyperbeln. Nach zwei Zwischenlagen steht der Aufriß der Schnittebene lotrecht, der Schnitt ist kongruent zur Umrißhyperbel des Aufrisses. Der Film ist zu Ende. Die weitere Drehung der Ebene würde nur schon gezeigte Schnitte vorführen.