ISSN 0073-8433

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN

SEKTION

TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN NATURWISSENSCHAFTEN

SERIE 10 · NUMMER 3 · 1988

FILM C 1627

Parametrische Anregung von Schwingungen

INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM · GÖTTINGEN

Angaben zum Film:

Tonfilm (Komm., deutsch oder engl.), 16 mm, farbig, 151 m, 14 min (24 B/s). Hergestellt 1981–1985, veröffentlicht 1987.
Der Film ist für die Verwendung im Hochschulunterricht bestimmt. Veröffentlichung aus der Fachhochschule Hannover, Fachbereich Elektrotechnik, Prof. Dr. P. DOBRINSKI, und dem Institut für den Wissenschaftlichen Film, Göttingen, Dr. G. GLATZER; Kamera: G. MATZDORF, K. LECHNER; Schnitt: G. MATZDORF, F.-U. FANELLI; Ton: K. KEMNER; Zeichentrick: G. MATZDORF, K. WINTER.

Zitierform:

DOBRINSKI, P., und INST. WISS. FILM: Parametrische Anregung von Schwingungen. Film C 1627 des IWF, Göttingen 1987. Publikation von P. DOBRINSKI, Publ. Wiss. Film., Sekt. Techn. Wiss./ Naturw., Ser. 10, Nr. 3/C 1627 (1988), 17 S.

Anschrift des Verfassers der Publikation:

Prof. Dr. P. DOBRINSKI, Fachhochschule Hannover, Fachbereich Elektrotechnik, Ricklinger Stadtweg 120, D-3000 Hannover.

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN

Sektion BIOLOGIE
Sektion ETHNOLOGIE
Sektion MEDIZIN
Sektion GESCHICHTE · PUBLIZISTIK
Sektion PSYCHOLOGIE · PÄDAGOGIK
Sektion TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN
NATURWISSENSCHAFTEN

Herausgeber: H.-K. GALLE · Redaktion: E. BETZ, I. SIMON

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN sind die schriftliche Ergänzung zu den Filmen des Instituts für den Wissenschaftlichen Film und der Encyclopaedia Cinematographica. Sie enthalten jeweils eine Einführung in das im Film behandelte Thema und die Begleitumstände des Films sowie eine genaue Beschreibung des Filminhalts. Film und Publikation zusammen stellen die wissenschaftliche Veröffentlichung dar.

PUBLIKATIONEN ZU WISSENSCHAFTLICHEN FILMEN werden in deutscher, englischer oder französischer Sprache herausgegeben. Sie erscheinen als Einzelhefte, die in den fachlichen Sektionen zu Serien zusammengefaßt werden.

Bestellungen und Anfragen an: Institut für den Wissenschaftlichen Film
Nonnenstieg 72 · D-3400 Göttingen
Tel. (05 51) 20 22 04

ISSN 0073–8433

FILME FÜR FORSCHUNG UND HOCHSCHULUNTERRICHT

PAUL DOBRINSKI, Hannover, und INSTITUT FÜR DEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM, Göttingen:

Film C 1627

Parametrische Anregung von Schwingungen

Verfasser der Publikation: PAUL DOBRINSKI

Mit 5 Abbildungen

Inhalt des Films:
Parametrische Anregung von Schwingungen. Der Film demonstriert wesentliche Merkmale parametrisch erregter Schwingungen und zeigt einige wichtige Anwendungsbeispiele.

Summary of the Film:
Parametric Excitation of Oscillations. The film illustrates essential characteristics of parametric oscillations and demonstrates some important applications.

Résumé du Film:
Stimulation paramétrique d'oscillations. Le film illustre des marques essentielles de les oscillations parametriques et il montre quelques exemples importants d'application.

Allgemeine Vorbemerkungen

Parametrisch erregte Schwingungen spielen in der Technik eine große Rolle. Zweck des Filmes ist es, anhand eines Sonderfalles, des sog. „Entartungsfalles", wesentliche Merkmale parametrisch erregter Schwingungen zu veranschaulichen. Außerdem werden wichtige Beispiele der technischen Anwendung dieses Sonderfalles vorgestellt.

Was sind parametrisch erregte Schwingungen?

Diese Frage wird im Film am Beispiel des Fadenpendels beantwortet. Bekanntlich gilt bei einem Fadenpendel, das mit genügend kleiner Amplitude schwingt, so daß es als linearer Schwinger betrachtet werden kann, für seine Eigenfrequenz

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad .$$

Die Parameter, welche die Eigenfrequenz bestimmen, sind also die Pendellänge l und die Fallbeschleunigung g. Der Parameter Pendellänge l läßt sich leicht zeitabhängig, insbesondere periodisch, verändern. Wie der Film zeigt, kann man bei geeigneter Wahl der Frequenz dieser periodischen Änderung der Pendellänge, der sog. Pumpfrequenz f_P, und geeigneter Phasenlage Energie in das schwingende Pendel „hineinpumpen" und es

dadurch zu größeren Schwingungsamplituden anregen. Durch geeignete periodische Änderung eines frequenzbestimmenden Parameters erfolgt also eine Schwingungsanregung. Daher der Name „parametrisch erregte Schwingungen".
Eine wichtige Randbedingung ist, daß das Pendel zu Beginn der Anregung bereits mit kleiner Amplitude schwingt.
Hierdurch und durch die Tatsache, daß während der ganzen Anregung die von außen wirkenden Kräfte nur in Richtung des Fadens und nicht in Schwingungsrichtung angreifen, unterscheiden sich parametrisch erregte von den bekannten erzwungenen Schwingungen eines Pendels.

Energiepumpen und Amplitudenzunahme

Als Beispiel für den Anregungsvorgang beim Fadenpendel betrachten wir einen besonders einfachen Fall. Wir nehmen an, das Heben und Senken des Pendelkörpers geschähe quasi ruckartig, wie in Abb. 1 dargestellt. Das heißt: beim Nulldurchgang werde er gegen die volle Schwerkraft mg und die zusätzlich wirkende Zentrifugalkraft $m\hat{\omega}^2$ l um die Strecke 2 Δ l gehoben, in den Umkehrpunkten unter der Wirkung der dort vorhandenen kleineren Schwerkraftkomponente mg cos $\hat{\varphi}$ um 2 Δ l gesenkt. – Die „Pumpfrequenz" der periodischen Änderung der Pendellänge ist also das Doppelte der Eigenfrequenz; $f_P = 2\ f_o$; sog. „Entartungsfall". –

Es ist sofort klar, daß im Nulldurchgang mehr Arbeit hineingesteckt als in den Umkehrpunkten entnommen wird. Dieses Energiepumpen wird um so wirkungsvoller, je größer die Amplituden werden. Denn erstens wächst dabei jeweils die maximale Winkelgeschwindigkeit $\hat{\omega}$ im Nulldurchgang, und zweitens nimmt wegen des größeren Ausschlages $\hat{\varphi}$ die Komponente der Schwerkraft in den Umkehrpunkten ab.
Es sei noch einmal darauf aufmerksam gemacht, daß ohne eine bereits am Anfang vorhandene Schwingung mit der kleinen Anfangsamplitude $\hat{\varphi}_1$ dieser Unterschied der Kräfte nicht vorhanden und damit eine Energiezufuhr nicht möglich wäre.

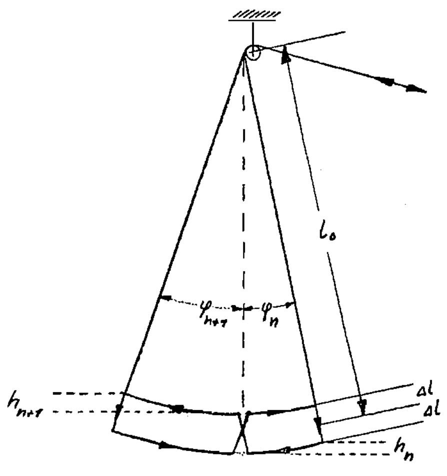

Abb. 1. Änderung der Pendellänge und Amplitudenzunahme bei einem Fadenpendel

Wir wollen den Zusammenhang zwischen zwei aufeinanderfolgenden Winkelamplituden $\hat{\varphi}$ und $\hat{\varphi}_{n+1}$ berechnen. Hierzu betrachten wir Abb. 1. Im rechten Umkehrpunkt befindet sich der Pendelkörper in der Höhe

$$h_n = (l_o + \Delta l)\ (1 - \cos\hat{\varphi}_n) \tag{1}$$

über dem tiefsten Bahnpunkt. Hat er den letzteren erreicht, berechnet sich seine Geschwindigkeit mit Hilfe des Energiesatzes. Es gilt

$$\frac{1}{2}\ m\ v_n^2 = mgh_n$$

oder mit $v_n = (l_o + \Delta\ l)\ \hat{\omega}_n$ unter Verwendung von (1)

$$(l_o + \Delta l)\hat{\omega}_n^2 = 2g\ (1 - \cos\hat{\varphi}_n) \tag{2}$$

Jetzt wird die Fadenlänge auf $l_o - \Delta l$ verkürzt. Da aber alle Fadenkräfte naturgemäß nur in Fadenrichtung wirken, existiert kein Drehmoment, und es gilt der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses:

$$m(l_o + \Delta l)^2\hat{\omega}_n = (l_o - \Delta l)^2\hat{\omega}_{n+1} \tag{3}$$

Daraus errechnet sich die neue maximale Winkelgeschwindigkeit $\hat{\omega}_{n+1}$ zu

$$\hat{\omega}_{n+1} = \hat{\omega}_n \frac{(l_o + \Delta l)^2}{(l_o - \Delta l)^2} \tag{4}$$

Mit dieser erreicht das Pendel den neuen Winkelausschlag $\hat{\varphi}_{n+1}$ usw.. Letzterer errechnet sich wieder mit Gleichung (2) zu

$$(l_o - \Delta l)\omega_{n+1}^2 = 2g\ (1 - \cos\varphi_{n+1}) \tag{5}$$

Faßt man (2), (4) und (5) zusammen, so erhält man schließlich den folgenden Zusammenhang

$$(l_o + \Delta l)^3\ (1 - \cos\hat{\varphi}_n) = (l_o - \Delta l)^3\ (1 - \cos\hat{\varphi}_{n+1}),$$

der in übersichtlicher Weise am besten graphisch ausgewertet wird. Zu diesem Zweck trägt man die beiden Funktionen $(l_o + \Delta l)\ (1 - \cos\hat{\varphi})$ und $(l_o - \Delta l)\ (1 - \cos_{\hat{\varphi}})$ als Kurven auf (Abb. 2). Den Amplitudenzuwachs erhält man dann, wenn man, wie in Abb. 2 angedeutet, von einem Anfangswert $\hat{\varphi}_1$ ausgehend die Treppe zwischen beiden Kurven hinaufgeht.

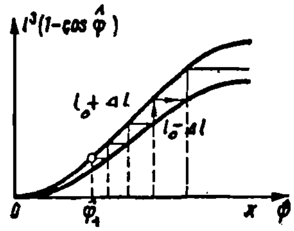

Abb. 2. Amplitudenzunahme beim Fadenpendel

Man macht sich leicht klar, daß bei Phasenumkehr, also Vergrößerung der Pendellänge im Nulldurchgang und Verkleinern in den Umkehrpunkten, die Energiebilanz negativ ist, die Amplituden also entsprechend abnehmen. Wichtig für die Anregung ist also die „richtige" Phasenlage.

Differentialgleichungen für parametrisch erregte lineare Schwinger ohne Dämpfung

Im Verlaufe des Filmes werden außer dem Fadenpendel noch weitere schwingungsfähige Systeme behandelt: die Schaukel und der elektromagnetische Schwingkreis. Bei Einführung der sog. reduzierten Pendellänge $l_{red} = s + \frac{J_s}{ms}$, wobei J_s das Massenträgheitsmoment des Systems Schaukel-Schaukelnder in Bezug auf den Schwerpunkt, m die Masse und s der Abstand Aufhängepunkt-Schwerpunkt sind, kann man die Schaukel wie ein Fadenpendel behandeln. Es gelten die Schwingungs-Differentialgleichungen

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \text{ bzw. } \ddot{\varphi} + \frac{g}{l_{red}}\varphi = 0.$$

Wir behandeln sie der Einfachheit halber gemeinsam. Beim elektro-magnetischen chwingkreis gilt bekanntlich z. B. für die Spannung

$$\ddot{u} + \frac{1}{LC}u = 0$$

Man erkennt: Mit der allgemeinen Schwingungsgröße y gilt immer

$$\ddot{y} + \omega_o^2\, y = 0$$

mit der Lösung $y = \hat{y} \sin(\omega_o t + \varphi_o)$, wobei $\hat{y}$ die Amplitude und φ_o der Nullphasenwinkel ist. Wichtig ist, daß der Faktor vor der nullten Ableitung das Quadrat der Eigenkreisfrequenz ist. Er bestimmt also die Frequenz, mit der das System schwingt. D. h.: beim Pendel ist wegen $\omega_o^2 = \frac{g}{l}$ der frequenzbestimmende Parameter l, beim elektromagnetischen Schwingkreis sind es wegen $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$ die Induktivität L und die Kapazität C. Wir nehmen jetzt an, wir würden einen dieser Parameter periodisch mit der Pumpfrequenz f_p um jeweils einen kleinen Relativbetrag ändern, z. B. $l = l_o - \Delta l \cos(\omega_p t)$ (wobei $\omega_p = 2\pi f_p$ ist) mit $\Delta l << l_o$ oder z.B. $C = C_o - \Delta C \cos(\omega_p t)$ mit $\Delta C << C_o$.

Dann wird $$\omega_o^2 = \frac{g}{l_o(1 - \frac{\Delta l}{l_o}\cos\omega_p t)} \approx \frac{g}{l_o}(1 + \frac{\Delta l}{l_o}\cos\omega_p t)$$

bzw. $$\omega_o^2 = \frac{1}{LC_o(1 - \frac{\Delta C}{C_o}\cos\omega_p t)} \approx \frac{1}{LC_o}(1 + \frac{\Delta C}{C_o}\cos\omega_p t)$$

In beiden Fällen können wir für ω_o^2 formal schreiben: $\omega_o^2 = A + B\cos\omega_p t$. Damit erhalten wir eine Schwingungs-Differentialgleichung des

Typs $\ddot{y} + (A + B\cos\omega_p t)\, y = 0$.

Dies ist eine sog. Matthieusche Differentialgleichung.

Das obige Beispiel des Fadenpendels, dessen Länge jeweils ruckartig geändert wurde, liefert mit $l = l_0 - \Delta l$ sgn cos $\omega_p t$ entsprechend nach einigen Umformungen

$$\ddot{y} + (A + B \text{ sgn } \cos \omega_p t)\, y = 0$$

Dies ist eine sog. Meißnersche Differentialgleichung.

Beide Gleichungs-Typen haben sowohl stabile als auch instabile Lösungen je nach den Beziehungen zwischen ω_p und den Werten für A und B, d. h. auch dem Verhältnis ω_p/ω_o. Hierzu sei jedoch auf die Literatur (z. B. [1], [2], [3]) verwiesen [1].

Wir wollen uns, wie im Film, auf den Fall beschränken, daß $f_p = 2f_o$ ist, d.h. auf den Fall, der häufig als „entartet“ bezeichnet wird.

Technische Anwendungen des Sonderfalles $f_p = 2f_o$

Der Film zeigt als Anwendungen des genannten Sonderfalles der parametrisch erregten Schwingungen
die Schaukel,
das Foucaultsche Pendel,
den Paraformer,
den parametrischen Verstärker.

Die beiden ersten Anwendungsfälle sind anhand des Filmtextes ohne weiteres verständlich. Der Paraformer und der parametrische Verstärker sollen noch etwas eingehender betrachtet werden:

Paraformer

Im Film wird mit Hilfe einer Trickdarstellung gezeigt, daß man in einen elektro-magnetischen Schwingkreis Schwingungsenergie hineinpumpen kann, indem man seine Induktivität periodisch verändert. Dies wird durch Herausziehen und Hineinscheiben des Eisenkerns einer Spule veranschaulicht.

Der Paraformer arbeitet genau nach diesem Prinzip. Aber natürlich erfolgt die Änderung der Induktivität nicht mechanisch, sondern magnetisch.

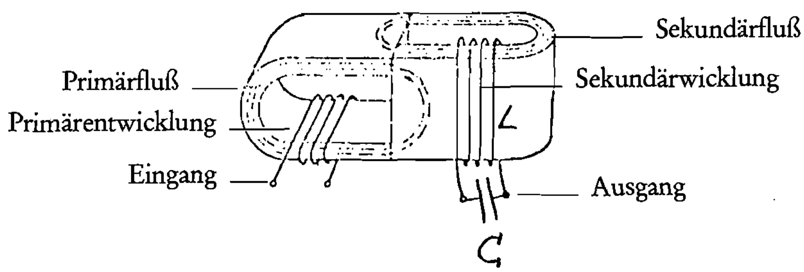

Abb. 3. Paraformer (Erklärung im Text)

Abb. 3 zeigt die besondere Anordnung von Eisenkernen, welche dies ermöglicht. Zwei U-Kerne werden um 90 Grad verdreht zusammengesetzt. Dadurch haben Primär- und

---

[1] Es sei noch angemerkt, daß durch die periodische Änderung der frequenzbestimmenden Parameter die ursprünglich linearen schwingungsfähigen Systeme nichtlinear geworden sind, so daß ein enger Zusammenhang zwischen parametrisch erregten Schwingungen und den Eigenschwingungen nichtlinearer Systeme mit „Bifurkationen“, „Chaos“ und dergl. besteht.

Sekundärwicklung keinen gemeinsamen Magnetflußanteil. Der Teil des Flusses, welcher den Kern der Sekundärwicklung durchsetzt, kann jedoch dessen magnetischen Widerstand R_M verändern, indem er einen Teil des Kerns entweder nur schwach oder sehr stark bis in die Nähe der Sättigung magnetisiert. Mit der Windungszahl N der Sekundärwicklung gilt für deren Induktivität bekanntlich $L = N^2/R_M$. Vergrößern des magnetischen Widerstandes dadurch, daß ein Teil des Kerns von der Primärspule aus vormagnetisiert wird, bedeutet Vermindern der Induktivität L; Verkleinern von R_M, d. h. geringere Vormagnetisierung durch den Primärfluß, erhöht die Induktivität.
Man überlegt sich leicht, daß die magnetische Energie der Sekundärspule $W = \frac{1}{2}\,\Phi^2/L$ bei gegebenem Fluß Φ durch Verkleinern von L vergrößert wird, wie es im Film im Trick veranschaulicht wird. Durch periodisches Verändern des Parameters L kann also in den Sekundärkreis parametrisch Energie hineingepumpt werden.
Häufig wird der Paraformer in stabilisierten Netzgeräten für die Frequenz 50 Hz eingesetzt. Hierzu wird der Sekundärschwingkreis auf $f_o = 50$ Hz abgestimmt. Legt man phasenrichtig eine Wechselspannung mit der Frequenz 50 Hz an die Primärwicklung, so wird der vom Primärfluß durchsetzte Teil des Sekundärkernes mit der doppelten Frequenz vormagnetisiert. – Bei einer symmetrischen Magnetisierungskennlinie des Kernmaterials kann man den Kern ja in beiden Flußrichtungen bis in die Nähe der Sättigung vormagnetisieren. Auch der Sekundärfluß ändert pro Halbschwingung seine Richtung. – Wir haben es also mit dem „Entartungsfall“ zu tun: Die Pumpfrequenz f_p ist gleich $2\,f_o$.
Um die Ausgangsspannung möglichst konstant zu halten, ist natürlich eine Rückführung, ein Istwert-Sollwert-Vergleich und eine entsprechende Steuerung des Primärstromes erforderlich.
Ein ganz entscheidender Vorteil des Paraformers gegenüber einem normalen Transformator sei noch hervorgehoben: Da Primär- und Sekundärspule keinen gemeinsamen Flußanteil haben, sind sie völlig entkoppelt. Weder können also Störspannungen vom Netz auf den Verbraucher noch vom Verbraucher ins Netz übertragen werden. Dies ist in vielen praktischen Fällen von großem Nutzen!

Parametrischer Verstärker

Die parametrische Verstärkung verwendet man überall dort, wo sehr kleine Signale möglichst rauscharm auf einen für die normale Elektronik geeigneten Pegel gebracht werden müssen, also z. B. in Empfangsanlagen für Signale von Raumsonden. Sie ist besonders rauscharm, weil hierbei nicht mit gesteuerten Strömen von Ladungsträgern sondern mit der Steuerung von „Reaktanzen“, meist Kapazitäten in Form von sog. „Kapazitätsdioden“ (Abb. 4) gearbeitet wird. Da man in vielen Fällen obendrein kühlen kann, ohne den Mechanismus der elektrischen Kapazitätssteuerung nennenswert zu beeinträchtigen, erreicht man so geringe Rauschpegel, daß selbst sehr schwache Signale sich daraus noch abheben. Im Film wird an einem einfachen Schwingkreis die grundsätzliche Arbeitsweise eines parametrischen Verstärkers, der mit einer Pumpfrequenz arbeitet, die gleich der doppelten Signalfrequenz ist, skizziert.
Nicht gezeigt ist hierbei, wie man es bei den schwachen Signalamplituden schafft, die richtige Phasenlage der Pumpspannung einzustellen. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, sei hier erwähnt, daß man hierfür geeignete Phasenregelkreise (Phase locked loops oder PLL-Schaltungen) einsetzen kann. (Siehe auch Lit. [1]).

Es gibt aber noch eine andere elegante Möglichkeit: Wenn man nämlich auf die Bedingung $f_p = 2f_o$ verzichtet und mit dem eigentlichen Verstärkerschwingkreis einen sog. „Ausgleichskreis" koppelt (Abb. 4), wird man auch von der Bedingung der „richtigen" Phasenlage frei.

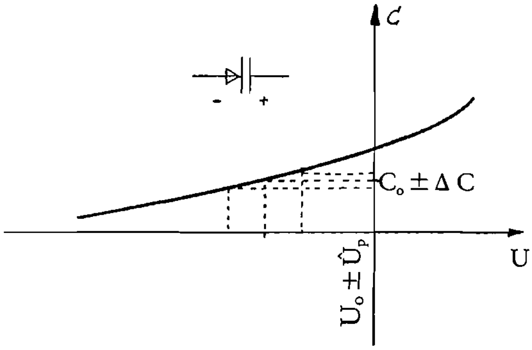

Abb. 4. Kennlinie und Schaltbild einer Kapazitätsdiode

Dies sei im folgenden kurz grundsätzlich erläutert. — Für weitere, insbesondere technische, Einzelheiten siehe z. B. Lit. [3].
Wir stellen uns vor, die Kapazität der Kapazitätsdiode werde mit der Pumpfrequenz f_p gemäß $C = C_o - \Delta C \sin(\omega_p t + \varphi_{op})$ geändert, indem man an sie eine geeignete Pumpwechselspannung legt. Gleichzeitig liegt C im Schwingkreis für die Signalfrequenz f_s. Es liegt an C also die Signal-Wechselspannung u_s. Dann gilt für jeden Momentanwert der Ladung q wegen $q = uC$ die Beziehung
$u_s C_o = u_D [C_o - \Delta C \sin(\omega_p t + \varphi_{op})]$
und wegen $\Delta C << C_o$

$$u_D \approx u_s [1 + \frac{\Delta C}{C_o} \sin(\omega_p t + \varphi_{op})].$$

Die Signalspannung u_s ist aber $u_s = \hat{u}_s \sin(\omega_s t + \varphi_{os})$. Also wird

$$u_D \approx \hat{u}_s \sin(\omega_s t + \varphi_{os}) [1 + \frac{\Delta C}{C_o} \sin(\omega_p t + \varphi_{op})]$$

$$= \hat{u}_s \sin(\omega_s t + \varphi_{os}) + \hat{u}_s \frac{\Delta C}{C_o} \sin(\omega_s t + \varphi_{os}) \sin(\omega_p t + \varphi_{op})$$

oder unter Verwendung von $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$
zur Abkürzung mit allgemeinen Konstanten:

$$u_D = A \sin(\omega_s t + \varphi_{os}) + B \cos[(\omega_p - \omega_s)t + \varphi_{op} - \varphi_{os}] + C \cos[(\omega_p + \omega_s)t + \varphi_{op} + \varphi_{os}]$$

D. h.: es gibt eine Summe von Wechselspannungen mit den Frequenzen f_s, $f_p - f_s$ und $f_p + f_s$. Dies wäre an sich noch nicht besonders interessant. Wir koppeln jedoch mit dem

Signalkreis und dem Kreis für die Pumpfrequenz jetzt einen weiteren Kreis für die Differenzfrequenz $f_p - f_s$ oder die Summenfrequenz $f_p + f_s$ (Abb. 5). Dann kann nämlich die Kapazitätsdiode auch in diesem Rhythmus variiert werden. Betrachten wir nur den ersten Fall: Es existiere ein „Ausgleichskreis" für die Ausgleichsfrequenz $f_A = f_p - f_s$. Dann erfolgt wieder eine multiplikative Mischung wie oben, und wir erhalten u. a. das Mischprodukt

$$\begin{aligned} u &= B' \sin(\omega_p t + \varphi_{op})\, B \cos[(\omega_p - \omega_s)\, t + \varphi_{op} - \varphi_{os}] \\ &= D \sin[(\omega_p - \omega_p + \omega_s)\, t + \varphi_{op} - \varphi_{op} + \varphi_{os}] \\ &+ E \sin[(2\,\omega_p - \omega_s)\, t + 2\,\varphi_{op} - \varphi_{os}] \end{aligned}$$

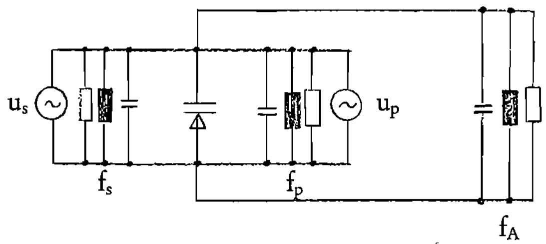

Abb. 5. Prinzipschaltbild eines parametrischen Verstärkers mit Ausgleichskreis für die Frequenz f_A

Für den letzteren Summanden ist kein Kreis vorhanden. Er braucht also nicht weiter berücksichtigt zu werden. Der erstere liefert aber $u = D \sin(\omega_s t + \varphi_{os})$.
Dies ist wieder eine Wechselspannung mit der Signalfrequenz f_s. Der Nullphasenwinkel φ_{op} der Pumpspannung kommt nicht mehr vor. Durch den Trick mit dem Ausgleichskreis ist also eine „Rückmischung" gelungen, die, wie hier nicht gezeigt werden soll, auch zur parametrischen Verstärkung des Signals führt, ohne die im „Entartungsfall" erforderliche Phasenbedingung einhalten zu müssen. — Weitere Einzelheiten, wie etwa die Lösung der Trennung von Eingang und Ausgang usw. entnehme man z. B. Lit. [3].

Schlußbetrachtung

Der Film und die obigen Erläuterungen demonstrieren an mehreren Beispielen den Vorteil der physikalischen Denkweise: Ein einheitliches Prinzip, hier das der parametrischen Erregung von Schwingungen, gestattet das Verständnis sowohl der uralten Technik des Schaukelns als auch derjenigen des parametrischen Verstärkers aus dem Zeitalter der Weltraumfahrt.

Erläuterungen zum Film

Wortlaut des gesprochenen Kommentars

Ein Festplatz! Auf manch einem Volksfest findet man noch die gute alte Schiffsschaukel. Mit ihr erreicht man beim Auf- und Abschwingen überraschend bald große Amplituden, ohne daß man sich vom Boden abstoßen muß.
Dieses Schaukeln ist ein Sonderfall einer sog. parametrisch erregten Schwingung. Wie kommt es zu einer solchen Anregung?

Betrachten wir der Einfachheit halber zunächst die Schwingungen eines Fadenpendels mit der konstanten Fadenlänge l zwischen Aufhängepunkt und Schwerpunkt der Kugel. Es schwingt mit einer bestimmten Eigenfrequenz f_o, die gegeben ist durch die Fallbeschleunigung g und durch die Fadenlänge l.
l und g sind sog. frequenzbestimmende Parameter. Ohne das Pendel zu Schwingungen anzuregen, wird hier zunächst die Pendellänge l periodisch vergrößert und verkleinert, und zwar über den in der linken Bildhälfte sichtbaren Excenter.
Jetzt die gleiche periodische Änderung von l, aber bei schwingendem Pendel. Man sieht, wie die Ausschläge zunehmen, ohne daß eine Kraft in Schwingungsrichtung ausgeübt wird. Es handelt sich also nicht um eine erzwungene Schwingung! Die Pendellänge l, die wir in diesem Falle verändern, ist der frequenzbestimmende Parameter. Daher die Bezeichnung: Parametrisch erregte Schwingung.
Wie kommt es beim schwingenden Pendel zum Anwachsen der Amplitude? Wir machen uns das klar, indem wir die Kräfte betrachten, die in den verschiedenen Schwingungsphasen auftreten.
Hier ein Pendel der Länge l.
Bei der Schwingung beschreibt die Kugel ein Stück einer Kreisbahn. In den Umkehrpunkten ist ihre Momentangeschwindigkeit 0. Beim Durchgang durch die Mittellage ist die Geschwindigkeit am größten. Bei einer Kugelmasse m zieht hier am Faden nicht nur die volle Schwerkraft $F_s = m \cdot g$, sondern auch die größtmögliche Zentrifugalkraft $F_z = m\hat{\omega}^2 l$.
$\hat{\omega}$ ist die maximale Winkelgeschwindigkeit in der Mittellage. In den Umkehrpunkten ist die Zentrifugalkraft 0, weil die Geschwindigkeit 0 ist. Außerdem wirkt in Fadenrichtung beim Winkel α nur die Komponente der Gewichtskraft $mg \cdot \cos \alpha$.
In den Umkehrpunkten zieht also insgesamt eine geringere Kraft als in der Mittellage.
Was geschieht bei Anregung der Schwingungen? Beim Durchgang durch die Mittellage wird die Pendellänge l verkürzt, in den Umkehrpunkten beim Winkelausschlag α verlängert. Hier der Vorgang noch einmal. Wie sieht dabei die Energiebilanz aus?
Wir heben das Pendel in der Mittellage entgegen der hier angreifenden Kraft um $2\,\Delta\, l$ an, stecken also eine gewisse Arbeit hinein.
Im Umkehrpunkt entnehmen wir dagegen Energie, allerdings ist diese Energie geringer; denn auch die angreifende Kraft ist hier geringer als in der Mittellage. Auf diese Weise wird Energie in das System hineingepumpt.
Betrachten wir jetzt noch einmal den gesamten Schwingungsablauf. Offensichtlich treten pro Schwingungsperiode zwei Kraftmaxima und zwei Kraftminima auf. Wir können also dem Pendel zweimal pro Periode Energie zuführen. Eine maximale Anregung erreichen wir, wenn erstens die anregende Pumpfrequenz f_p genau doppelt so groß ist, wie die Eigenfrequenz f_o des Pendels, und wenn zweitens die Energiezufuhr stets in der Mittellage erfolgt, wie hier. Verschieben wir nämlich die Phase der Anregung um eine halbe Periode, jetzt, so erkennen wir, daß bei gleichbleibender Pumpfrequenz das Pendel abgebremst wird.
Ist es einmal zur Ruhe gekommen, kann es keine Veränderung der Pendellänge wieder in Schwingung versetzen, weil pro Periode gleichviel Energie zugeführt wird wie entnommen wird.

Hier das Modell einer Schiffsschaukel.
In diesem Modell ist der frequenzbestimmende Parameter der Abstand zwischen dem Aufhängepunkt und dem Schwerpunkt des Männchens. Ein Regelkreis sorgt dafür, daß dieser Parameter mit der richtigen Frequenz und in der richtigen Phase verändert wird, und zwar über diesen Excenter.
Damit sich das Männchen in einer Schwingungsphase aufrichtet, in der es dem System Energie zuführt, wird der Istzustand der Schaukelschwingung über eine Meßsonde abgefragt. Gepumpt wird wieder mit der doppelten Frequenz der Eigenschwingung.
Bei optimaler Anpassung an die Schwingungsphase erreicht unser Modell bald große Schwingungsamplituden. Was geschieht, wenn das Pumpen in der falschen Phase erfolgt?
Ein Umschalten der Elektronik bewirkt, daß sich das Männchen in den Umkehrpunkten aufrichtet und beim Durchgang durch die Mittellage in die Knie geht. Wie erwartet, wird jetzt dem System Schwingungsenergie entzogen. Die Amplituden nehmen ab.
Nach Stillstand der Schwingung lassen sich auch durch längeres Pumpen keine merklichen Ausschläge erzielen.
Jetzt wissen wir auch, welche Rolle der Schaukelbursche bei der Schiffsschaukel spielt.
Er muß die Schaukel zunächst zum Schwingen bringen, ehe eine Energiezufuhr möglich ist.
Dieses Foucaultsche Pendel schwingt in einer festen Ebene.
Ohne Eingriff von außen würde es nach einiger Zeit zur Ruhe kommen. Durch parametrische Anregung wird es so entdämpft, daß seine Amplitude konstant bleibt.
Hier der Mechanismus im oberen Stockwerk. Er hebt und senkt den Pendelkörper mit der richtigen Pumpfrequenz und der richtigen Phase.
Die Tatsache, daß jede parametrische Anregung eines Pendels ohne Einfluß auf die Schwingungsebene erfolgt, hat für das Foucaultsche Pendel besondere Bedeutung.
Die konstante Lage der Schwingungsebene ist bekanntlich die Voraussetzung für den Nachweis der Erddrehung, deutlich erkennbar daran, daß wir die Pendelebene nach vier Stunden aus einer anderen Blickrichtung sehen.
Nicht nur mechanische Schwingungen lassen sich parametrisch anregen.
Hier ein elektromagnetischer Schwingkreis, bestehend aus einer Spule und einem Kondensator.
Als Parameter bestimmen die Induktivität L und die Kapazität C die Eigenfrequenz f_0 des Schwingkreises in Analogie zur Formel für das mechanische Pendel.
Betrachten wir eine Schwingung!
Ausgangszustand sei eine maximale Ladung des Kondensators.
Der Kondensator entlädt sich und ist jetzt vollständig entladen.
Dann lädt er sich wieder auf — mit umgekehrtem Vorzeichen.
Betrachten wir die Spule! Durch sie fließt Strom, der jetzt maximal ist und auf Null zurückgeht. Mit dem Stromfluß verbunden ist der Auf- und Abbau eines Magnetfeldes der Spule.
Wie läßt sich diesem System parametrisch Energie zuführen?
Dazu ein Gedankenexperiment!
Man schiebt einen Weicheisenkern in die Spule und zieht ihn anschließend wieder heraus.

Er läßt sich kräftefrei einführen, wenn kein Strom fließt und das Magnetfeld verschwindet. Dagegen leistet man Arbeit, wenn man ihn beim Stromfluß aus dem Magnetfeld herauszieht.
Auf diese Weise kann man dem Schwingkreis Energie zuführen, und zwar parametrisch, weil durch die Bewegung des Eisenkerns die Induktivität L der Spule verändert wird.
In der Praxis ändert man allerdings die Induktivität nicht auf diesem mechanischem Wege.
Hier rechts ein Schwingkreis mit Kondensator und Spule auf dem blauen Kern.
Eine Steuerwicklung links, auf gelbem Kern regt mit der Pumpfrequenz f_p parametrisch den Schwingkreis mit der Eigenfrequenz f_o an.
Die Steuerwicklung verändert nämlich den magnetischen Widerstand des Eisenkerns und damit die Induktivität L des Schwingkreises.
Wieder gilt im optimalen Fall $f_p = 2\ f_o$.
Nach diesem Schema einer elektrischen Anregung ist dieser sog. Paraformer konstruiert. Links die Steuerspule, rechts der Schwingkreis.
Als Beispiel für eine Anwendung hier eine Schaltung, die eine Ausgangsspannung sehr genau regelt mit dem eingebauten Paraformer.
Zurück zu unserem Schwingkreis, bestehend aus einem Kondensator mit der Kapazität C sowie einer Spule mit der Induktivität L.
Wir haben gesehen, daß durch eine Veränderung von L im richtigen Augenblick Energie in den Schwingkreis gepumpt werden kann. Ebenso müßte es möglich sein, den Schwingkreis durch Veränderung der Kapazität C anzuregen.
Wann ist der günstigste Zeitpunkt für die Energiezufuhr?
Im ungeladenen Zustand herrscht keine Anziehungskraft zwischen den Kondensatorplatten. Im geladenen Zustand ziehen sich die Platten dagegen an. Also zieht man sie im geladenen Zustand auseinander und nähert sie im entladenen Zustand wieder einander, d. h., man führt im geladenen Zustand Energie zu, aber man entnimmt im entladenen Zustand keine Energie.
Auch hier ist offensichtlich die optimale Pumpfrequenz doppelt so groß wie die Eigenfrequenz des Schwingkreises.
In der Praxis verändert man die Kapazität nicht mechanisch, sondern auf elektrischem Wege, beispielsweise bei dieser Halbleiterdiode. Sie ist um vieles kleiner als ein Pfennig.
Die Kapazität ihrer Sperrschicht kann durch eine angelegte Spannung verändert werden.
In diesem Schaltplan ist die sog. Kapazitätsdiode wichtigster Bestandteil eines parametrischen Hochfrequenzverstärkers mit der Pumpspannung u_P.
Der Schwingkreis besteht dabei aus einem Hohlraumresonator, in den die Kapazitätsdiode — im Bild rechts — hineinragt.
Solche Verstärker werden z. B. zum Empfang schwacher Signale von Nachrichtensatelliten in Erdefunkstellen benutzt.
Erstaunlicherweise wird hier also, technisch hochentwickelt, dasselbe einfache Prinzip der parametrischen Anregung benutzt wie bei der Schiffsschaukel auf dem Jahrmarkt.

English Version of the Spoken Commentary

A fairground.

Sometimes one can meet the good old swing-boat. Swinging up and down, one can achieve surprisingly high amplitudes without the need to push oneself off the ground.

This swinging is a special case of so-called parametric oscillations. How is such a parametric excitation possible?

Let us watch, for simplicity, firstly the oscillation of a thread pendulum having the constant length l between its suspension point and the center of mass of the ball.

It oscillates with a certain Eigen-frequency f_o, which is given by the acceleration of free fall, g, and the length of the thread, l.

l and g are the so-called frequency determining parameters. Without stimulating the pendulum to oscillations, at first the length l is varied periodically by means of the excenter, seen in the left part of the picture.

Now the same periodic variation of l, but this time while the pendulum is oscillating. Increasing amplitudes are observed without any force acting in the direction of the oscillation. This means that this is not a forced oscillation.

The length of the pendulum, l, which in this case is varied, is the frequency determining parameter. This explains the name: parametric oscillation.

How are these increasing amplitudes of the oscillating pendulum produced? We can understand this by observing the forces working at different phases of the oscillation.

Here a pendulum of length l.

During its oscillation the ball is swinging on a part of an orbit. At the reversal points the momentary velocity is equal to zero. Passing the center position the ball has its maximum velocity. At this point the force drawing at the thread is not only the full weight of the ball $F_s = mg$ but also the highest possible centrifugal force $F_z = m\,\hat{\omega}^2 \cdot l$. $\hat{\omega}$ is the maximum angular velocity at the center position.

At the reversal points the centrifugal force equals zero because the velocity is equal to zero. And besides this fact along the thread only the component of the weight $mg \cdot \cos\alpha$ is acting. That means: at the reversal points in total a smaller force is drawing than at the center point.

What happens when exciting the oscillations? While the pendulum is passing the center its length is shortened; while going through the reversal points it is lengthened.

To recapitulate: what about the balance of energy?

At the center point we raise the ball against the here-acting force for the distance $2\,\Delta\,l$, thereby putting in a certain amount of energy.

In comparison at the reversal points we take out energy. Bus this energy is lower because the here-acting force is smaller than at the center point. By this means energy is pumped into the oscillating system.

Let us watch once more the whole period. Obviously in every period there are two maxima and two minima of the acting force. Thus we are able to supply energy to the oscillating pendulum two times per period. The maximum excitation is achieved, if firstly the pump frequency f_p is the double of the Eigen-frequency f_o, and if secondly the feeding in of the energy always is done at the center point. In comparison if we shift the phase of the excitation for half a period, now, we observe that, still with constant pump frequency, the amplitudes are decreasing. Being at rest at last, no variation of the thread length is able to produce new oscillations, because in this state the energy supplied per period equals the energy taken out.

Here the model of a swing-boat.

In this model the distance between the suspension point and the center of gravity of the little man is the frequency-determining parameter. A control circuit provides the correct pump frequency and correct phase.

It does so by means of this excenter. For controlling the correct operating, namely the man straightening at this phase, suitable for supplying energy, the state of the oscillation is measured by a magnetic sensor. Pumping occurs with the double of the Eigen-frequency.

With optimum adaptation very soon our model achieves large amplitudes. What happens, if the pumping occurs with wrong phase adaptation?

Switching over the control circuit has the effect that now the man straightens at the reversal points and crouches at the center point. As expected, now energy is removed from the system.

The amplitude decreases.

And when the swing is at rest even prolonged pumping produces no observable amplitudes.

Now we understand the role of the swing-boat attendant.

He has to make the swing-boat swing before any energy supply is possible.

This Foucault-pendulum is oscillating in a fixed plane.

Without external interference it would shortly be standing still. By parametric excitation it gets the proper energy for oscillating with constant amplitudes.

This is the mechanism on the upper story. It raises and lowers the body of the pendulum with the correct pump frequency and the correct phase.

The fact that parametric excitation is without influence on the plane of the oscillation is of special significance for the Foucault pendulum.

The constant site of the plane of oscillation is known to be a presupposition for proving the rotation of the earth.

Which can be observed by the fact that after 4 hours we can look at the plane of oscillation from another direction of view.

Not only mechanical oscillations can be excited parametrically. Here an electro-magnetic oscillatory circuit, consisting of an inductance L and a capacitance C.

These parameters are responsible for the Eigen-frequency f_0 according to the formula of the mechanical pendulum.

Let us observe a period of oscillation.

For the starting state we assume a maximum electrical charge on the capacitance.

The capacitance discharges, and now it is empty.

In turn it is charged again, but with the opposite sign of the charge.

Let us have a look at the inductance. A current is flowing, which now is highest and then decreases to zero. With the current a growing and vanishing magnetic field is combined. How can this system be supplied with energy?

Pushing in is possible without any acting force, when no current flows and therefore no magnetic field exists.
On the other hand work is supplied to the coil by pulling the core out of the magnetic field while the current is flowing.
Let's do an experiment of thought! An iron core is pushed into the coil and is now pulled out.
In this way the oscillating circuit gains energy. It functions parametrically because one of the parameters, namely the inductance L, is varied by moving the iron core in and out. In practice, of course, the inductance is not varied mechanically.
Here on the right-hand side an oscillatory circuit with a capacitor and a coil on the blue core. A control winding, left, on the yellow core serves for exciting with the pump frequency f_p, the circuit having the Eigen-frequency f_o.
That's because a suitable current through the control winding varies the magnetic resistance and with it the inductance L of the circuit.
Again for the optimum case is valid: $f_p = 2\ f_o$
According to this scheme of electrical excitation this so called paraformer is constructed. On the left-hand side the control winding, on the right the oscillatory circuit.
As an example for a suitable application here a constant voltage circuit, an important part of which is the paraformer.
Back to our oscillatory circuit, consisting of capacitance C and inductance L.
We saw that, by a suitable variation of L at the right moment, energy can be supplied. Equally, it should be possible to supply energy by variation of the capacitance C.
What is the most feasible moment for inducing energy?
Without any charges on the plates of the capacitor, no force is acting between them. When charged, the plates attract each other. So one pulls the plates apart when they are charged and puts them together again in the discharged state. That means energy is supplied at the charged state, but no energy is removed at the discharged state.
Obviously, again the optimum pump frequency is two times the Eigen-frequency of the circuit. In practice, the capacitance is not varied mechanically but electrically, for example by means of this semiconductor diode. It is much smaller than a pfennig-coin. The value of its capacitance can be varied by the applied voltage.
In this circuit, this so called varactor diode is the most important part of a parametric high-frequency amplifier to which a pump voltage u_p is applied.
The oscillatory circuit is a resonant waveguide, into which the varactor diode is incorporated (on the right-hand-side.)
Such amplifiers are used for receiving very weak signals from radio satellites.
Remarkably, for this modern high-tech purpose, the same principle of parametric excitation is used as for the good old swing-boat at the fairground.

Literatur

[1] BEST, R.: Theorie und Anwendungen der Phase-Locked-Loops. Aarau 1982.

[2] KLOTTER, K.: Technische Schwingungslehre. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951 und 1960.

[3] LÖCHERER, K.-H., and C.-D. BRANDT, Parametric Electronics. Berlin – Heidelberg – New York 1982.

[4] MAGNUS, K.: Schwingungen. Stuttgart 1961.

[5] MALKIN, I. G.: Theorie der Stabilität einer Bewegung. Deutsche Übers. von W. HAHN und R. REISSIG. München 1959.

Abbildungsnachweis

Abb. 1–5: P. DOBRINSKI.